Points-selle en horizon infini de jeux différentiels linéaires quadratiques régis par des équations aux dérivées partielles : méthodes directes et passivité

Jean Lévine

POINTS-SELLE EN HORIZON INFINI DE JEUX DIFFERENTIELS LINEAIRES QUADRATIQUES REGIS PAR DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

METHODES DIRECTES ET PASSIVITE

JEAN LEVINE

JUIN 1976

A B S T R A C T

The aim of this work is to study saddle-point problems for Linear quadratic differential games with partial differential equations on an infinite time interval.

After recalling, in the first part, known results concerning the finite time interval case, we prove, in the second part, that in the finite interval case, the open-loop saddle-point, (as well as the closed-loop one) can be deduced from the solution of an infinite dimensional Riccati equation under two kinds of assumptions.

The third part is devoted to the infinite time interval case. We first prove the existence of an open-loop saddle point and then study the algebraic Riccati equation.

This leads us to consider the limit, as the interval length T goes to infinity, of the value of the game. The simplest case is when the value of the game is non decreasing as $T \to +\infty$: very precise convergence theorems for the state and the optimal strategies can be obtained. Though weaker convergence results may be shown in the case where the value has no special behaviour as $T \to +\infty$, it is possible to prove the existence of a solution of the algebraic Riccati equation and therefore the existence of a closed-loop saddle-point.

Under a certain assumption, it is possible to reduce the saddle-point problem to an optimal control problem having the property that the Riccati equation is the same for the game and for the minimization problem. Thus the stability assumptions on the system may be weakened.

We give a few examples as a conclusion.

In the fourth part, we try a different approach to study the solutions of the algebraic Riccati equation using the concept of "Passivity". For this purpose; we give a generalization in abstract Hilbert spaces of the "positive real Lemma" and of the "frequency domain inequality". Then, we prove that the set of operators which appear in the positive real Lemma, has a minimal element, and with an additional assumption, a maximal element too, as in finite dimensional linear systems. The passivity theory is very useful to prove the existence of a solution to some algebraic Riccati equations and thus, for the study of saddle points. Moreover it gives a necessary and sufficient condition for the existence of a saddle-point, and so, it is possible to solve an inverse problem for differential games.

Je tiens à remercier Monsieur BENSOUSSAN pour avoir dirigé mes recherches et pour ses encouragements et conseils fructueux sans lesquels ce travail n'aurait pu être mené à bien.

Je remercie Monsieur BERNHARD qui m'a accueilli dans son équipe du Centre d'Automatique de l'E.N.S.M.P. où j'ai trouvé un environnement particulièrement stimulant et amical.

Je remercie Monsieur EKELAND qui a bien voulu faire partie du jury.

I N T R O D U C T I O N

Nous nous intéressons dans ce travail aux jeux différentiels linéaires quadratiques à deux joueurs et à somme nulle, régis par des équations aux dérivées partielles.

Le problème abordé ici consiste à étudier les stratégies optimales en boucle ouverte ou fermée dans un intervalle de temps <u>infini</u>.

Les deux principales questions que l'on se pose sont <u>l'existence</u> ou non de points-selle en boucle ouverte ou fermée et la manière de les calculer par l'intermédiaire de <u>l'équation de Riccati</u>.

Dans la première partie, on définit les concepts de stra tégie, de point-selle en boucle ouverte et en boucle fermée

Puis dans la deuxième partie, on démontre un résultat pré liminaire : le point-selle en boucle ouverte en horizon fini, se calcule comme un point-selle en boucle fermée, à l'aide de l'équation de Riccati associée.

Dans la troisième partie, on étudie et on compare les conditions d'existence de point-selle en boucle ouverte et en boucle fermée en horizon infini, par des méthodes de passage à la limite.

Dans la dernière partie, on fait l'étude directe des points-selle en boucle fermée à l'aide du concept de <u>Passivité</u> Enfin, on traite du Problème Inverse

T A B L E   D E S   M A T I E R E S

IVème PARTIE

Ière PARTIE

1. RAPPELS SUR LES JEUX DIFFERENTIELS LINEAIRES QUADRATIQUES A DUREE FIXEE, AVEC DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES.

1.1. Stratégies. Point-selle.

Soit un système contrôlé par deux joueurs 1 et 2, dont l'évolution sur tout intervalle $[0,\theta]$ est décrite par une équation aux dérivées partielles linéaire :

$$(1.1)\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + A(.)y = f + B_1(.)\, v_1 + B_2(.)\, v_2 \quad , \quad t\varepsilon\,]0,\theta[\ , \\ y(0) = y_o\ . \end{cases}$$

définie à l'aide des données suivantes :

Soient V *et* H *deux Hilberts réels séparables, tels que* $V \subset H$, *l'injection étant continue et* V *étant dense dans* H. *On note* $(.,.)$ *le produit scalaire de* H *et* $|.|$ *la norme associée. On note* $||.||$ *la norme de* V.

On considère $\forall\ t\varepsilon[0,\theta[$ *une forme bilinéaire* $a(t;.,.)$:

$$(1.2)\begin{cases} a(t;.,.) : \text{forme bilinéaire est continue sur } V\times V,\ \forall\ t\varepsilon[0,\theta[\ . \\ t \rightsquigarrow a(t;\phi,\psi) \text{ est mesurable sur } [0,\theta[,\ \forall\ \phi,\psi\varepsilon\ V. \\ \exists\ \lambda \geq o \text{ et } \alpha > o \text{ tels que :} \\ a(t;\phi,\phi) + \lambda|\phi|^2 \geq \alpha||\phi||^2,\ \forall\ \phi\ \varepsilon\ V,\ \forall\ t\ \varepsilon[o\ \theta[\ . \end{cases}$$

$a(t;.,.)$ *définit alors de manière unique un opérateur* $A(t)\varepsilon\mathcal{L}(V;V')$ *(ensemble des applications linéaires continues de* V *dans* V'*) par :*

$$a(t;\phi,\psi) = \langle A(t)\ \phi,\psi\rangle \quad \forall\ \phi,\psi\varepsilon V,\ \forall\ t\varepsilon\ [0,\theta[\ ,$$

où $\langle\ \bullet,\bullet\rangle$ *désigne le produit scalaire de la dualité* $\langle V';V\rangle$.

Si E *est un espace de Hilbert, on définit* $L^2(0,\theta;E)$ *par :*

$\{\phi|\int_0^\theta||\phi(t)||_E^2dt\ \ <+\ \infty\}$. *C'est un espace de Hilbert pour la norme :*

$$||\phi||_{L^2(0,\theta;E)} = (\int_0^\theta||\phi(t)||_E^2dt)^{1/2}.$$

On se donne enfin :

$$(1.3)\begin{cases} E_1, E_2 : \text{Hilberts réels séparables dont les produits scalaires} \\ \text{respectifs sont notés } (.,.)_{E_1}, (.,.)_{E_2} \text{ et les normes } ||.||_{E_1}, ||.||_{E_2} \\ B_i(t) \in \mathcal{L}(E_i;V'), ||B_i(t)||_{\mathcal{L}(E_i;V')} \leq c, \ \forall\ t \in [0,\theta[\ ,\ i = 1,2. \\ t \mapsto \langle B_i(t)e_i, v\rangle \text{ mesurable sur } [0,\theta[\ \forall\ e_i \in E_i,\ \forall\ v \in V,\ i = 1,2. \\ f \in L^2(0,\theta;V')\ ,\ y_o \in H. \end{cases}$$

La solution y *de (1.1) est alors définie de manière unique pour tout* $v_1 \in L^2(0,\theta;E_1)$, $v_2 \in L^2(0,\theta;E_2)$ *et vérifie :*

(1.4) $\quad y \in L^2(0,\theta;V)$, $\dfrac{dy}{dt} \in L^2(0,\theta;V')$,

$\dfrac{dy}{dt}$ *étant pris au sens des distributions.*

Soit $W(0,\theta) = \{\phi | \phi \in L^2(0,\theta;V), \frac{d\phi}{dt} \in L^2(0,\theta;V')\}$ *muni de la norme:*

$$||\phi||_{W(0,\theta)} = (||\phi||^2_{L^2(0,\theta;V)} + ||\frac{d\phi}{dt}||^2_{L^2(0,\theta;V')})^{1/2}$$

et soit $C^0([0,\bar{\theta}];H)$ *l'ensemble des applications continues de* $[0,\bar{\theta}]$ *dans* H, *muni de la topologie de la convergence uniforme .*

On sait (Lions-Magenes [15]) que: $W(0,\theta) \subset C^0([0,\bar{\theta}];H)$, *l'injection étant continue, si bien que l'état* **y**, *solution de (1.1) est une fonction continue du temps.*

Dans tout ce qui suit, on suppose que l'horizon T du jeu est un réel positif ou $+\infty$.

Définissons maintenant ce qu'on entend par stratégie des deux joueurs:

Définition 1.1: Une stratégie pour le joueur i est une application v_i de $[0,T[\times H$ dans E_i, i=1,2.

On note $\mathcal{U}_i$ l'ensemble des stratégies du joueur i, i=1,2.

$\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont supposés connus de chacun des joueurs au début du jeu.

Les joueurs mesurent les performances de leurs stratégies à l'aide d'une fonctionnelle quadratique:

$$(1.5)\quad J(v_1,v_2) = \int_0^T \{||C(t)y(t;v_1,v_2) - z_d(t)||^2_F + (N_1(t)v_1(t,y),v_1(t,y))_{E_1}$$
$$(N_2(t)v_2(t,y),v_2(t,y))_{E_2}\}\ dt.$$

où:

$$(1.6)\begin{cases} F \text{ est un Hilbert réel séparable dont le produit scalaire et la norme} \\ \text{sont notés } (.,.)_F \text{ et } \|.\|_F . \\ C(t) \in \mathcal{L}(V;F)\ ,\ \|C(t)\|_{\mathcal{L}(V;F)} \leq c \quad \forall\, t \in [0,T[. \\ t \mapsto (C(t)v,f)_F \text{ est mesurable sur } [0,T[\ \ \forall\, v \in V\ ,\ \forall\, f \in F. \\ z_d \in L^2(0,T;F)\ . \end{cases}$$

et :

$$(1.7)\begin{cases} N_i(t) \in \mathcal{L}(E_i;E_i),\ \|N_i(t)\|_{\mathcal{L}(E_i;E_i)} \leq c,\ N_i^*(t) = (N_i(t),\ \forall\, t \in [0,T[\\ t \mapsto (N_i(t)e_i,e_i')_{E_i} \text{ est mesurable sur } [0,T[\ \ \forall\, e_i,\ e_i' \in E_i \\ \exists \nu_i > 0 \text{ tel que : } (N_i(t)e_i,e_i)_{E_i} \geq \nu_i \|e_i\|^2_{E_i} \quad \forall\, e_i \in E_i,\ \forall\, t \in [0,T[\\ i = 1,2. \end{cases}$$

Le joueur 1 cherche, à l'aide de v_1, à minimiser J et le joueur 2, à l'aide de v_2, cherche à maximiser J.

Cependant, comme J mesure la performance de la trajectoire engendrée par (v_1,v_2), il faut que celle-ci existe et soit unique. C'est pourquoi on introduit la :

Définition 1.2 : On dit que le couple $(v_1,v_2) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ est jouable si et seulement si $y(t;v_1,v_2)$, solution de (1.1) engendrée par (v_1,v_2), existe et est unique dans $L^2(0,T;V)$.

La solution du jeu, si elle existe, consiste à jouer (Von Neumann Morgenstern [22]) des stratégies (u_1^*,u_2^*) qui forment un point-selle de J :

$$(1.8)\begin{cases} (u_1^*,u_2^*) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2\ ,\ (u_1^*,u_2^*) : \text{jouable} . \\ J(u_1^*,v_2) \leq J(u_1^*,u_2^*) \leq J(v_1,u_2^*) \\ \forall\, v_1 \in \mathcal{U}_1 \text{ tel que } (v_1,u_2^*) \text{: jouable} \\ \forall\, v_2 \in \mathcal{U}_2 \text{ tel que } (u_1^*,v_2) \text{: jouable} \end{cases}$$

Dans la suite ,on ne considère que des stratégies jouables.

Le théorème suivant d'existence de point-selle pour des fonctionnelles convexes-concaves (Bensoussan [2]) est fondamental:

<u>THEOREME 1.1.</u>: *On suppose que* V_i *est un espace de Hilbert contenu dans* $\mathcal{U}_i$ *et que* K_i *est un convexe fermé de* V_i, $i = 1,2$. *On suppose aussi que :*

$$\forall\, v_2 \in K_2\ ,\ v_1 \mapsto J(v_1,v_2) \text{ est strictement convexe, s.c.i.}$$

$$\forall\, v_1 \in K_1\ ,\ v_2 \mapsto J(v_1,v_2) \text{ est strictement concave, s.c.s.}$$

et : $\exists\, (v_1^\circ,v_2^\circ) \in K_1 \times K_2$ *tel que* :

$$J(v_1^\circ,v_2) \quad J(v_1,v_2^\circ) \to +\infty \text{ lorsque } \|v_1\|_{\mathcal{U}_1} + \|v_2\|_{\mathcal{U}_2} \to +\infty$$

Alors il existe un unique point-selle de J.

1.2. <u>Point-selle en boucle fermée. Point-selle en boucle ouverte</u>.

Deux classes importantes de stratégies peuvent être définies (les concepts classiques seront ici légèrement modifiés pour s'adapter au cadre des équations aux dérivées partielles).

<u>Définition 1.3.</u>: On appelle <u>stratégie en boucle fermée dans $L^2(0,T;E_i)$</u> pour le joueur i un élément $v_i \in \mathcal{U}_i$ tel que pour tout $v_{3-i} \in \mathcal{U}_{3-i}$ vérifiant : (v_i,v_{3-i}) est jouable, on ait :

$$v_i(.,y(.;v_i,v_{3-i})) \in L^2(0,T;E_i)\ ,\ i = 1,2\ ,$$

où $y(t;v_i,v_{3-i})$ est la solution de (1.1) dans $L^2(0,T;V)$ engendrée par $(v_i,v_{3-i}$

<u>Définition 1.4.</u> : Une <u>stratégie en boucle ouverte</u> pour le joueur i est une stratégie en boucle fermée dans $L^2(0,T;E_i)$ constante sur H :

$$v_i(t,y) \equiv w_i(t) \quad \forall\, y \in H\ ,\ i = 1,2\ .$$

On note $\mathcal{U}_i^\circ$ l'ensemble des stratégies en boucle ouverte pour le joueur i, i = 1,2, et on peut identifier $\mathcal{U}_i^\circ$ et $L^2(0,T;E_i)$, i = 1,2.

On dira que (u_1^*,u_2^*) est un <u>point-selle en boucle fermée dans $L^2(0,T;E_1) \times L^2(0,T;E_2)$</u> si u_1^* (resp ectivement u_2^*) est une stratégie en boucle fermée dans $L^2(0,T;E_1)$ (resp. dans $L^2(0,T;E_2)$) et si (u_1^*,u_2^*) est un point-selle de J contre toutes les stratégies jouables en boucle fermée dans $L^2(0,T;E_i)$, i = 1,2.

On pourra considérer la notion de point-selle en boucle fermée dans $L^2_{loc}(0,T;E_1) \times L^2_{loc}(0,T;E_2)$ qui se définit de la même manière que précédemment en changeant L^2 en L^2_{loc} .

Finalement, on dira que (u_1^*,u_2^*) est un point-selle en boucle ouverte si u_1^* (resp. u_2^*) est un élément de $L^2(0,T;E_1)$ (resp. $L^2(0,T;E_2)$) et si (u_1^*,u_2^*) est un point-selle de J contre toutes les stratégies en boucle ouverte.

Berkovitz [5] a établi le résultat de comparaison suivant dans un cadre analogue :

LEMME 1.1.: si (u_1^*,u_2^*) *est un point-selle en boucle ouverte de* J , *c'est aussi un point-selle en boucle fermée de* J *dans* $L^2(0,T;E_1) \times L^2(0,T;E_2)$.

La réciproque est généralement fausse. Cependant, comme un couple de stratégies jouables engendre une solution de (1.1) sur tout l'intervalle $[0,T]$, on établit facilement le :

LEMME 1.2.: Soit (u_1^*,u_2^*) *un couple de stratégies en boucle fermée dans* $L^2(0,T;E_1) \times L^2(0,T;E_2)$, *jouable.*

Pour que (u_1^*,u_2^*) *soit un point-selle en boucle fermée de* J *dans* $L^2(0,T;E_1) \times L^2(0,T;E_2)$, *il faut et il suffit que :*

$$\begin{cases} J(u_1^*,v_2) \leq J(u_1^*,u_2^*) \leq J(v_1,u_2^*) \\ \forall\, v_1 \varepsilon\, \mathcal{U}_1^o \text{ tel que } (v_1,u_2^*) : \text{jouable.} \\ \forall\, v_2 \varepsilon\, \mathcal{U}_2^o \text{ tel que } (u_1^*,v_2) : \text{jouable.} \end{cases}$$

1.3. Existence de point-selle en boucle ouverte en horizon fini (sans contrainte)

Lemaire [12] a donné une condition pour laquelle les hypothèses du théorème 1.1. sont vérifiées :

THEOREME 1.2.: Si : (H1) $\nu_1 > 0$ *et* $\nu_2 > \mathcal{G}_2^2$, *où :*

$$(1.9)\quad \mathcal{G}_2^2 = \frac{e^{2\lambda T}}{\alpha^2} \| C \|^2_{\mathcal{L}(L^2(0,T;V);L^2(0,T;F))} \cdot \| B_2 \|^2_{\mathcal{L}(L^2(0,T;E_2);L^2(0,T;V'))}$$

alors il existe un unique point-selle en boucle ouverte de J caractérisé par le système d'équations variationnelles :

$$
(1.10)\quad \begin{cases} a_1(u_1^*,v_1) + b(u_2^*,v_1) \quad L_1(v_1) = 0 \quad \forall\ v_1 \in L^2(0,T;E_1) \\ a_2(u_2^*,v_2) \quad b^*(u_1^*,v_2) \quad L_2(v_2) = 0 \quad \forall\ v_2 \in L^2(0,T;E_2) \\ (u_1^*,u_2^*) \in L^2(0,T;E_1) \times L^2(0,T;E_2)\ . \end{cases}
$$

où l'on a posé :

$$
(1.11)\quad \begin{cases} y(v_1,v_2) = G_1 v_1 + G_2 v_2 + \tilde{g} \\ a_1(v_1,w_1) = \int_0^T \{(C(t)G_1 v_1, C(t)G_1 w_1)_F + (N_1(t)v_1,w_1)_{E_1}\}dt \\ a_2(v_2,w_2) = \int_0^T \{(N_2(t)v_2,w_2)_{E_2} \quad (C(t)G_2 v_2, C(t)G_2 w_2)_F\}dt \\ b(v_2,v_1) = \int_0^T (C(t)G_2 v_2, C(t)G_1 v_1)_F dt \overset{\text{def}}{=} b^*(v_1,v_2) \\ L_1(v_1) = \int_0^T (C(t)\tilde{g} \quad z_d\ ,\ C(t)G_1 v_1)_F dt \\ L_2(v_2) = \int_0^T (C(t)\tilde{g} \quad z_d\ ,\ C(t)G_2 v_2)_F dt\ . \end{cases}
$$

La condition (1.9) garantit la stricte concavité de J et la coercivité de $a_2(.,.)$.

Introduisons l'état adjoint p :

$$
(1.12)\quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} + A^*(.)p = C^*(.)i_F\ (C(.)y \quad z_d) \\ p(T) = 0\ ,\ p \in L^2(0,T;V) \end{cases}
$$

où $y \equiv y(u_1^*,u_2^*)$ et i_F est l'injection de F dans F'.

(1.12) a une solution unique.

Le système (1.10) devient alors :

$$
(1.13)\quad \begin{cases} i_{E_1}^{-1}\ B_1^*(t)p(t) + N_1(t)u_1^*(t) = 0 \qquad \text{p.p.t } \in [0,T] \\ i_{E_2}^{-1}\ B_2^*(t)p(t) - N_2(t)u_2^*(t) = 0 \qquad \text{p.p.t } \in [0,T] \end{cases}
$$

où : i_{E_k} est l'injection de E_k dans E'_k , $k = 1,2$,

donc :

$$(1.14) \qquad u_1^* = N_1^{-1}(.)i_{E_1}^{-1}\, B_1^*(.)p \ , \ u_2^* = N_2^{-1}(.)i_{E_2}^{-1}\, B_2^*(.)p$$

les égalités ayant lieu dans $L^2(0,T;E_1)$ et $L^2(0,T;E_2)$ respectivement.

Alors si l'on pose :

$$(1.15) \quad \begin{cases} D_1(t) = B_1(t)N_1^{-1}(t)i_{E_1}^{-1}\, B_1^*(t) \quad B_2(t)N_2^{-1}(t)i_{E_2}^{-1}\, B_2^*(t) \\ D_2(t) = C^*(t)i_F\, C(t) \\ g(t) = C^*(t)i_F z_d(t) \end{cases}$$

avec $D_1(t) \in \mathcal{L}(V;V')$, $D_2(t) \in \mathcal{L}(V;V')$, $g \in L^2(0,T;V')$,

en éliminant (u_1^*,u_2^*) de l'état (1.1) et de l'état adjoint (1.12), on obtient :

$$(1.16) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + A(.)y + D_1(.)p = f \\ -\dfrac{dp}{dt} + A^*(.)p \quad D_2(.)y = g \\ u(0) = y_\circ \ , \ p(T) = 0 \ , \ y,p \in L^2(0,T;V) \end{cases}$$

1.4. Existence de point-selle en boucle fermée en horizon fini dans $L^2(0,T;E_1) \times L^2(0,T;E_2)$ (sans contrainte). Equation de Riccati.

Bensoussan [2] a montré que si :

$$(1.17) \quad \begin{cases} B_i(t) \in \mathcal{L}(E_i;H), \ \forall\, t \in [0,T], \ i=1,2, \\ \| B_i(t) \|_{\mathcal{L}(E_i;H)} \leq c \qquad \forall\, t \in [0,T] \ , \ i = 1,2 \ . \\ t \mapsto (B_i(t)e_i,h) \text{ mesurable sur } [0,T] \ , \ \forall\, e_i \in E_i, \ \forall\, h \in H \ , \ i=1,2. \\ C(t) \in \mathcal{L}(H;F), \ t \mapsto (C(t)h,f)_F \text{ mesurable sur } [0,T], \forall\, h \in H \ , \ \forall\, f \in F. \\ \text{l'injection de } V \text{ dans } H \text{ est compacte.} \end{cases}$$

et si :

$$(H2) \qquad D_1(t) \geq 0 \quad \forall\, t \in [0,T]$$

alors le couple (u_1^*,u_2^*) défini par :

$$(1.19)\quad \begin{cases} u_1^*(t,y) = N_1^{-1}(t)\, i_{E_1}^{-1}\, B_1^*(t)\,(P(t)y + r(t)) \\ u_2^*(t,y) = N_2^{-1}(t)\, i_{E_2}^{-1}\, B_2^*(t)\,(P(t)y + r(t)) \end{cases}$$

est un point-selle en boucle fermée dans $L^2(0,T;E_1) \times L^2(0,T;E_2)$, où P et r sont solutions respectivement de :

$$(1.20)\quad \begin{cases} (\frac{dP(t)}{dt})\eta + P(t)A(t)\eta + A^*(t)P(t)\eta + P(t)D_1(t)P(t)\eta = D_2(t)\eta \\ \forall\ \eta \text{ vérifiant : } \begin{cases} A(.)\eta \in L^2(0,T;H) \\ \text{si } \eta \in W(0,T) \text{ et } \frac{d\eta}{dt} + A(.)\eta \in L^2(0,T;H), \\ \text{alors } P(.)\eta \in W(0,T). \end{cases} \\ P(T) = 0 \\ P(t) \in \mathcal{L}(H;H)\ ,\ P^*(t) = P(t)\ ,\ P(t) \geq 0 \quad \forall\ t \in [0,T]\ . \end{cases}$$

et de :

$$(1.21)\quad \begin{cases} \frac{dr}{dt} + A^*(.)r + P(.)D_1(.)r = P(.)f + g\ ,\ t \in]0,T[\\ r(T) = 0\ ,\ r \in W(0,T)\ . \end{cases}$$

L'équation (1.20) est appelée équation de Riccati.

On va voir dans la suite que cette équation joue un rôle fondamental dans les problèmes de point-selle, aussi bien en boucle ouverte qu'en boucle fermée.

IIème PARTIE

2. L'EQUATION DE RICCATI ET LE POINT-SELLE EN BOUCLE OUVERTE EN HORIZON FINI.

2.1. Présentation du résultat

THEOREME 2.1 : *On suppose que :*

$$(2.1)\quad \begin{cases} a(t;.,.) \text{ donné par (1.2) est identique à } a(.,.) \quad \forall\, t \in [0,T] \\ \text{et donc } A(t) \equiv A \in \mathcal{L}(V;V') \, . \\ \text{(1.5), (1.7) et (1.17) ont lieu.} \end{cases}$$

et que :

(H1) $\quad \nu_1 > o \, , \; \nu_2 > \mathfrak{S}^2_?$ *(donné par (1.9))* .

Alors il existe un opérateur P(t) *et une fonction* r *solutions de (1.20) et (1.21) et le point-selle en boucle ouverte* (u_1^*, u_2^*) *de* J *est donné par :*

$$(2.2)\quad \begin{cases} u_1^*(t) = N_1^{-1}(t) i_{E_1}^{-1} B_1^*(t)(P(t)y(t) + r(t)) \\ \\ u_2^*(t) = N_2^{-1}(t) i_{E_2}^{-1} B_2^*(t)(P(t)y(t) + r(t)) \end{cases} \qquad \text{p.p. } t \in [0,T]$$

où y *est la solution de (1.16)* .

Ce théorème est l'analogue du résultat du paragraphe 1.4, pour le point selle en boucle ouverte.

Notons que (2.2) permet de définir (u_1^*, u_2^*) sous forme de point-selle en boucle fermée par la formule (1.19). Ceci n'est pas étonnant au vu du Lemme 1.1

Cependant l'hypothèse (H2) n'implique pas en général que $D_1(t) \geq 0$ $\forall\, t \in [0,T]$, et aucune théorie ne donne alors de résultat d'existence de P(t) solution de l'équation de Riccati (1.20) .

La démonstration du théorème 2.1 se fait en trois parties :

Au §2.2, on montre l'existence de P(t) et r et certaines de leurs propriétés à l'aide d'estimations a priori tirées directement du système (1.16)

Au §2.3, on construit une suite (P_m, r_m) par la méthode de Galerkin, approximant P et r dans des espaces de dimension finie où l'on sait que P_m vérifie l'équation de Riccati.

Enfin, au §2.4, on termine, en passant à la limite lorsque $m \to \infty$, la démonstration du théorème 2.1.

Le corollaire 2.1 donne une synthèse des résultats.

2.2. L'opérateur P(t) et la fonction r

LEMME 2.1.: Sous les hypothèses du théorème 2.1, le système :

$$(2.3)\begin{cases} \dfrac{d\phi}{dt} + A\phi + D_1(.)\psi = f \\ & t \in]s,T[\ ,\ 0 \leq s < T \\ \dfrac{d\psi}{dt} + A^*\psi \quad D_2(.)\phi = g \\ \phi(s) = h\ ,\ \psi(T) = 0\ ,\ \phi\ ,\ \psi \in L^2(s,T;V) \end{cases}$$

admet une solution unique $\{\phi,\psi\}$, h étant donné dans H .

Démonstration : Considérons le système :

$$(2.4)\begin{cases} \dfrac{d\phi}{dt} + A\phi = f + B_1(.)v_1 + B_2(.)v_2\ , \quad t \in]s,T[\quad ,\quad 0 \leq s < T \\ \phi(s) = h \in H\ ,\ \phi \in L^2(s,T;V) \end{cases}$$

et la fonction coût :

$$J^h_{s,T}(v_1,v_2) = \int_s^T\{\ \| C(t)\Phi(t;v_1,v_2)-z_d(t)\|^2_F+(N_1(t)v_1(t),v_1(t))_{E_1} - (N_2(t)v_2(t),v_2(t))_{E_2}\}\ dt$$

On introduit l'état adjoint ψ par :

$$(2.5)\begin{cases} -\dfrac{d\psi}{dt} + A^*\psi = C^*(.)i_F(C(.)\phi \quad z_d)\quad ,\quad t \in]s,T[\ . \\ \psi(T) = 0\ , \quad \psi \in L^2(s,T;V). \end{cases}$$

où $\phi = \phi(u_1^*,u_2^*)$, avec (u_1^*,u_2^*) point-selle en boucle ouverte de $J^h_{s,T}$.

Alors on a : $\begin{cases} u_1^*(t) = N_1^{-1}(t)i_{E_1}^{-1}\ B_1^*(t)\psi\ (t) \\ u_2^*(t) = N_2^{-1}(t)i_{E_2}^{-1}\ B_2^*(t)\psi\ (t) \end{cases}$ p.p.t $\in [s,T]$

d'où (2.3) après avoir éliminé (u_1^*,u_2^*) dans (2.4) et (2.5).

LEMME 2.2.: L'application $h \mapsto \{\phi,\psi\}$ solution de (2.3) est affine continue de $H \to W(s,T) \times W(s,T)$.

<u>Démonstration</u> : Soit une suite $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H vérifiant : $h_n \to h$ lorsque $n \to \infty$ dans H fort. Soit $\{\phi_n,\psi_n\}$ solution dans $(L^2(s,T;V))^2$ de :

$$(2.6)\quad \begin{cases} \dfrac{d\phi_n}{dt} + A\,\phi_n + D_1(.)\psi_n = 0 \\[2ex] \dfrac{d\psi_n}{dt} + A^*\psi_n \quad D_2(.)\phi_n = 0 & t \in \,]s,T[\\[2ex] \phi_n(s) = h_n \;,\; \psi_n(T) = 0 \;. \end{cases}$$

Multipliant la deuxième équation par ψ_n et intégrant de s à T :

$$\int_s^T \left(\frac{d\psi_n}{dt} + A^*\psi_n \;,\; \psi_n\right)dt = \int_s^T (D_2(t)\phi_n(t) \;,\; \psi_n(t))dt$$

soit :

$$|\psi_n(s)|^2 + 2\alpha \int_s^T \|\psi_n\|^2 dt \quad 2\lambda \int_s^T |\psi_n|^2 dt \leq \frac{1}{\alpha} \int_s^T \|D_2(t)\phi_n(t)\|^2_{V'} dt +$$

$$+ \alpha \int_s^T \|\psi_n\|^2 dt \;.$$

Donc :

$$(2.7)\quad |\psi_n(s)|^2 + \alpha \int_s^T \|\psi_n\|^2 dt \leq \frac{1}{\alpha} \int_s^T \|D_2(t)\phi_n(t)\|^2_{V'} dt + 2\lambda \int_s^T |\psi_n|^2 dt$$

mais on a, $\{\Lambda(t), t \geq 0\}$ étant le semi-groupe fortement continu engendré par A :

$$\phi_n(t) = \Lambda(t-s)h_n - \int_s^t \Lambda(t-\tau)D_1(\tau)\psi_n(\tau)d\tau \;,\; T \geq t \geq s \;.$$

Donc :

$$\|D_2(t)\phi_n\|_{V'} \leq c \sup_{s,t\in[0,T]} \|D_2(t)\| \; \|\Lambda(t-s)\| \; |h_n| +$$

$$+ c \sup_{\tau,t\in[0,T]} \|D_2(t)\| \; \|\Lambda(t-\tau)\| \; \|D_1(\tau)\| \int_s^T |\psi_n(t)|dt$$

et comme $\|D_2(t)\| \leq c$, $\|D_1(t)\| \leq c$ et $\|\Lambda(t)\| \leq e^{\lambda t}$, $\forall\, t \in [0,T]$,

On a :

$$(2.8)\quad \|D_2(t)\phi_n(t)\|_{V'} \leq c|h_n| + c' \int_s^T |\psi_n(t)|dt$$

où c et c' sont indépendantes de n et de s.

Donc en reportant (2.8) dans (2.7) :

$$|\psi_n(s)|^2 + \alpha \int_s^T \|\psi_n\|^2 dt \leq \frac{T}{\alpha}\,(c|h_n| + c' \int_s^T |\psi_n(t)|dt)^2 + 2\lambda \int_s^T |\psi_n(t)|^2 dt$$

$$\leq 2\,\frac{T}{\alpha}c^2|h_n|^2 + 2(\frac{T^3}{\alpha}c'^2 + \lambda) \int_s^T |\psi_n(t)|^2 dt$$

et comme $|h_n| \leq c_1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ puisque $h_n \to h$ dans H fort, on a , c et c' désignant des constantes diverses indépendantes de s et de n :

$$|\psi_n(s)|^2 + \alpha \int_s^T \|\psi_n\|^2 dt \leq c + c' \int_s^T |\psi_n(t)|^2 dt \quad .$$

On peut alors appliquer l'inégalité de Gronwall :

(2.9) $\quad |\psi_n(s)|^2 \leq c$ et $\int_s^T \|\psi_n\|^2 dt \leq c$.

Soit maintenant $\Phi_n(t) = e^{-\lambda t}\phi_n(t)$. Φ_n vérifie :

$$(2.10)\begin{cases} \frac{d\Phi_n}{dt} + A\Phi_n + \lambda\Phi_n = -\,e^{\lambda t} D_1(.)\psi_n \ , \quad s < t < T \\ \Phi_n(s) = e^{\lambda s}h_n \ , \quad \Phi_n \in L^2(s,T;V) \ . \end{cases}$$

Alors, en multipliant par Φ_n et en intégrant entre s et T :

$$\int_s^T (\frac{d\Phi_n}{dt} + A\Phi_n + \lambda\Phi_n \ , \ \Phi_n)dt = \int_s^T (e^{-\lambda t}D_1(t)\psi_n(t) \ , \ \Phi_n(t))dt$$

Soit :

$$|\Phi_n(T)|^2 \quad e^{-2\lambda s}|h_n|^2 + 2\alpha \int_s^T \|\Phi_n\|^2 dt \leq \frac{1}{\alpha} \int_s^T \|D_1(t)\psi_n(t)\|^2_{V'} dt + \alpha \int_s^T \|\Phi_n\|^2 dt$$

et, compte tenu de la décroissance de la fonction $e^{-2\lambda t}$, on a, grâce à (2.9)

$$e^{2\lambda T}(|\phi_n(T)|^2 + \alpha \int_s^T \|\phi_n\|^2 dt) \leq \frac{1}{\alpha}\,c$$

donc : $\int_s^T \|\phi_n\|^2 dt \leq$ constante indépendante de s et de n.

Compte tenu de (2.9), on peut extraire une sous-suite $\{\phi_\mu, \psi_\mu\}$ de $L^2(s,T;V) \times L^2(s,T;V)$ telle que :

$$(2.11)\begin{cases} \phi_\mu \to \tilde{\phi} \text{ dans } L^2(s,T;V) \text{ faible} \\ \psi_\mu \to \tilde{\psi} \text{ dans } L^2(s,T;V) \text{ faible} \end{cases}$$

et par continuité et linéarité de A, $D_1(t)$ et $D_2(t)$, on peut passer à la limite dans (2.6) :

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{\phi}}{dt} + A\tilde{\phi} + D_1(.)\tilde{\psi} = 0 & \\ & s < t < T \\ \dfrac{d\tilde{\psi}}{dt} + A^*\tilde{\psi} \quad D_2(.)\tilde{\phi} = 0 & \\ \tilde{\phi}(s) = h \ , \ \tilde{\psi}(T) = 0 \ , \ \tilde{\phi},\tilde{\psi} \in L^2(s,T;V) & \end{cases}$$

Donc, la solution du système étant unique, $\tilde{\phi} = \phi$, $\tilde{\psi} = \psi$ ce qui prouve la continuité faible de la partie linéaire de l'application $h \mapsto \{\phi,\psi\}$, d'où le résultat.

<u>*COROLLAIRE 2.1*</u> : *L'application* $h \mapsto \psi(s)$ *est affine continue de* H *dans* H.

<u>Démonstration</u> : L'application $h \mapsto \psi(s)$ est composée de :

$$h \xmapsto{l_1} \{\phi,\psi\} \quad \text{et de} \quad \{\phi,\psi\} \xmapsto{l_2} \psi(s)$$

l_1 est affine continue de H dans $W(s,T) \times W(s,T)$ d'après le lemme 3.2.

l_2 est linéaire continue de $W(s,T) \times W(s,T)$ dans H comme application trace.

<u>*COROLLAIRE 2.2*</u> : *L'application* $h \mapsto \psi(s)$ *s'écrit de manière unique :*

$\psi(s) = P(s)h + r(s)$ *où* $P(s) \in \mathscr{L}(H;H)$, $r(s) \in H$.

<u>*LEMME 2.3*</u> : *Soit* $\{y,p\}$ *solution de* (2.3) *alors :*

(2.12) $\quad p(t) = P(t)y(t) + r(t) \qquad \forall\ t \in [0,T]$. *où* $P(t)$ *est donné par la règle suivante :*

$$(2.13) \quad \begin{cases} \dfrac{d\beta}{dt} + A\beta + D_1(.)\gamma = 0 & \\ & s < t < T \\ \dfrac{d\gamma}{dt} + A^*\gamma \quad D_2(.)\beta = 0 & \\ \beta(s) = h \ , \ \gamma(T) = 0 & \end{cases}$$

et :

(2.14) $\quad \gamma(s) = P(s)h$

et où $r(t)$ *est donné par la règle suivante :*

$$(2.15) \quad \begin{cases} \dfrac{d\eta}{dt} + A\eta + D_1(.)\xi = f & \\ & s < t < T \\ \dfrac{d\xi}{dt} + A^*\xi \quad D_2(.)\eta = g & \\ \eta(s) = 0 \ , \ \xi(T) = 0 & \end{cases}$$

et :

(2.16) $\quad r(s) = \xi(s)$

<u>*LEMME 2.4*</u> *: On a :*

(2.17) $\quad P^{*}(t) = P(t)\ ,\ P(t) \geq 0 \quad \forall\ t \in [0,T]$.

<u>Démonstration</u> : De (2.13), on tire :

$$0 = \int_s^T \left(\frac{d\gamma}{dt}(t) + A^{*}\gamma(t) \quad D_2(t)\beta(t), \bar{\beta}(t)\right)dt\ ,\ \forall\ \bar{\beta} \in L^2(s,T;V)$$

Soit alors $\bar{\beta}$ tel que $(\bar{\beta},\bar{\gamma})$ soit solution de (2.13) pour $\bar{\beta}(s) = \bar{h} \in H$. Alors :

$$0 = \int_s^T \left(- \frac{d\gamma}{dt}(t) + A^{*}\gamma(t) \quad D_2(t)\beta(t), \bar{\beta}(t)\right)dt =$$

$$= (\gamma(s),\bar{\beta}(s)) \quad \int_s^T \left[(D_2(t)\beta(t),\bar{\beta}(t)) + (D_1(t)\gamma(t),\gamma(t))\right]dt$$

et comme $\gamma(s) = P(s)h$ et $\bar{\beta}(s) = \bar{h}$, on a :

(2.18) $\quad (P(s)h,\bar{h}) = \int_s^T \left[(D_2(t)\beta(t),\bar{\beta}(t)) + (D_1(t)\gamma(t),\bar{\gamma}(t))\right]dt$

et comme $D_2^{*}(t) = D_2(t)$ et $D_1^{*}(t) = D_1(t) \quad \forall\ t \in [0,T]$, on a : $P^{*}(t) = P(t)$.

Pour prouver que $P(t) \geq 0$, il suffit de montrer que :

(2.19) $\quad (P(s)h,h) = \underset{v_1}{\text{Min}}\ \underset{v_2}{\text{Max}}\ \bar{J}^h_{s,T}(v_1,v_2) = \underset{v_2}{\text{Max}}\ \underset{v_1}{\text{Min}}\ \bar{J}^h_{s,T}(v_1,v_2)$

avec : $\bar{J}^h_{s,T}(v_1,v_2) = \int_s^T \{\| C(t)\beta(t)v_1,v_2)\|^2_F + (N_1(t)v_1(t),v_1(t))_{E_1}$

$$(N_2(t)v_2(t),v_2(t))_{E_2}\}dt$$

et $\beta(t;v_1,v_2)$ est donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{d\beta}{dt} + A\beta = B_1(.)v_1 + B_2(.)v_2\ ,\ t \in]s,T[\\ \beta(s) = h \end{cases}$$

En effet, si l'on suppose (2.19) un instant démontré, on a :

$$(2.20) \quad \begin{cases} \bar{J}^h_{s,T}(u_1,v_2) \leq \bar{J}^h_{s,T}(u_1,u_2) = (P(s)h,h) \leq \bar{J}^h_{s,T}(v_1,u_2) \\ \forall\ v_1 \in L^2(s,T;E_1)\ ,\ \forall\ v_2 \in L^2(s,T;E_2) \end{cases}$$

et, en faisant $v_2 = 0$, on obtient :

$$(P(s)h,h) = \bar{J}^h_{s,T}(u_1,u_2) \geq \bar{J}^h_{s,T}(u_1,0) = \int_s^T \{ \| C(t)\beta(t;u_1,0)\|^2_F +$$

$$+ (N_1(t)u_1(t),u_1(t))_{E_1} \}dt$$

$$\geq 0 \ , \ \forall\ h \in H \quad \text{puisque } N_1(t) > 0 \ .$$

Montrons donc (2.19) :

Comme le point-selle en boucle ouverte de $\bar{J}^h_{s,T}$ existe et est unique grâce à (H1), en appliquant le théorème 1.2 et en introduisant l'état adjoint γ :

$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma}{dt} + A^*\gamma \quad D_2(.)\beta = 0 \\ \gamma(T)=0, \ \gamma \in L^2(s,T;V). \end{cases}$$

le système (2.13) a alors une solution unique et :

$$(2.21) \quad \begin{cases} u_1(t) = N_1^{-1}(t)i_{E_1}^{-1}B_1^*(t)\gamma(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{p.p. } t \in [s,T] \\ u_2(t) = N_2^{-1}(t)i_{E_2}^{-1}B_2^*(t)\gamma(t) \ . \end{cases}$$

Donc :

$$\bar{J}^h_{s,T}(u_1,u_2) = \int_s^T \{ \| C(t)\beta(t)\|^2_F + (B_1(t)N_1^{-1}(t)i_{E_1}^{-1}B_1^*(t)\gamma(t),\gamma(t))$$

$$(B_2(t)N_2^{-1}(t)i_{E_2}^{-1}B_2^*(t)\gamma(t),\gamma(t))\}dt$$

$$= \int_s^T \{(D_2(t)\beta(t),\beta(t)) + (D_1(t)\gamma(t),\gamma(t))\}dt$$

$$= (P(s)h,h) \quad \text{d'après (2.18), et le lemme est prouvé.}$$

<u>LEMME 2.5</u> : *L'application :*

(2.22) $\quad t \mapsto (P(t)h,\bar{h})$ *est continue* $\ \forall\ t \in [0,T]\ ,\ \forall\ h,\bar{h} \in H$.

<u>Démonstration</u> : Considérons une suite de réels positifs $\{s_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ telle que :

$s_n \in [0,T[\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

Pour tout n, on sait que le système :

$$(2.23) \quad \begin{cases} \dfrac{d\phi_n}{dt} + A\phi_n + D_1(.)\psi_n = 0 \\ \dfrac{d\psi_n}{dt} + A^*\psi_n \quad D_2(.)\phi_n = 0 \\ \phi_n(s_n) = h \ , \ \psi_n(T) = 0 \ , \ \phi_n ,\psi_n \in L^2(s_n,T;V) \end{cases}$$

a une solution unique .

Alors , multipliant scalairement la seconde équation de (2.23) par ψ_n et intégrant de s_n à T, puis procédant de la même façon qu'au Lemme 2.2, on obtient:

(2.24) $\quad |\psi_n(s_n)| \leq c \ , \ \int_{s_n}^{T} \| \psi_n \|^2 dt \leq c \ ,$

c étant une constante indépendante de n.

En suivant toujours la méthode du Lemme 2.2, posant:

$$\Phi_n(t) = e^{\lambda t}\phi_n(t) \text{ , on obtient:}$$

$$e^{2\lambda T}(|\phi_n(T)|^2 + \alpha \int_{s_n}^{T} \| \phi_n \|^2 dt) \leq \frac{1}{\alpha} c + e^{\lambda s_n} |h|^2 \leq \frac{1}{\alpha} c + |h|^2 \ .$$

Donc:

(2.25) $\quad \int_{s_n}^{T} \| \phi_n \|^2 dt \leq$ constante indépendante de n.

On fait maintenant le changement de variable:

$$t = s_n + \tau(T - s_n) \quad , \quad \tau \in [0,1]$$

et on pose:

$$\phi_n^{s_n}(\tau) = \phi_n(s_n + \tau(T - s_n)) \ , \ \psi_n^{s_n}(\tau) = \psi_n(s_n + \tau(T - s_n)) \ .$$

Alors, d'après (2.24) et (2.25), on a:

$$|\psi_n^{s_n}(0)| \leq c \ , \ \int_0^1 \| \psi_n^{s_n} \|^2 dt \leq c \ , \ \int_0^1 \| \phi_n^{s_n} \|^2 dt \leq c \ .$$

On peut donc extraire une sous-suite $\{\phi_\mu^{s_\mu}, \psi_\mu^{s_\mu}\}$ telle que :

$$\begin{cases} \phi_\mu^{s_\mu} \longrightarrow \tilde{\phi}^s & \text{dans } L^2(0,1;V) \text{ faible} \\ \psi_\mu^{s_\mu} \longrightarrow \tilde{\psi}^s & \text{dans } L^2(0,1;V) \text{ faible ,} \end{cases}$$

et comme $\phi_\mu^{s_\mu}$ et $\psi_\mu^{s_\mu}$ vérifient le système :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \phi_\mu^{s_\mu} + (T - s_\mu)(A\phi_\mu^{s_\mu} + D_1^{s_\mu}(\tau)\psi_\mu^{s_\mu}) = 0 & \\ & 0 < \tau < 1 \\ -\frac{d}{d}\psi_\mu^{s_\mu} + (T - s_\mu)(A^*\psi_\mu^{s_\mu} \quad D_2^{s_\mu}(\tau)\phi_\mu^{s_\mu}) = 0 & \\ \phi_\mu^{s_\mu}(0) = h \ , \ \psi_\mu^{s_\mu}(1) = 0 \ , \ \phi_\mu^{s_\mu}, \psi_\mu^{s_\mu} \in L^2(0,1;V) & \end{cases}$$

avec : $D_i^{s_\mu}(\tau) = D_i(s_\mu + \tau(T-s_\mu))$, $i=1,2$,

on a :

$$\left\| \frac{d}{d\tau}\phi_\mu^{s_\mu} \right\|_{L^2(0,1;V')} \leq c \ , \quad \left\| \frac{d}{d\tau}\psi_\mu^{s_\mu} \right\|_{L^2(0,1;V')} \leq c \ ,$$

c étant indépendante de s_μ .Alors par continuité et linéarité de A, $D_1^{s_\mu}$, $D_2^{s_\mu}$, on peut passer à la limite lorsque μ tend vers l'∞ , compte-tenu du fait que :

$(T-s_\mu)(A\phi_\mu^{s_\mu} + D_1^{s_\mu}(\tau)\psi_\mu^{s_\mu} \ , \ \theta) = (\phi_\mu^{s_\mu} \ ,(T-s_\mu)A^*\theta) + (\psi_\mu^{s_\mu} \ ,(T-s_\mu)D_1^{s_\mu}(\tau)\theta)$

tend vers : $(\tilde{\phi}^s \ ,(T-s)A^*\theta) + (\tilde{\psi}^s \ ,(T-s)D_1^s(\tau)\theta)$ lorsque μ tend vers l'∞ ,$\forall\theta \in V$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$ par exemple.

On a donc à la limite:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}\tilde{\phi}^s + (T-s)(A\tilde{\phi}^s + D_1^s(.)\tilde{\psi}^s) = 0 & \quad 0 < \tau < 1 \\ \frac{d}{d\tau}\tilde{\psi}^s + (T-s)(A^*\tilde{\psi}^s \quad D_2^s(.)\tilde{\phi}^s) = 0 & \\ \tilde{\phi}^s(0) = h \ , \ \tilde{\psi}^s(T) = 0 \ , \ \tilde{\phi}^s,\tilde{\psi}^s \in L^2(0,1;V) & \end{cases}$$

soit , par unicité de la solution :

$$\tilde{\phi}^s = \phi^s \quad \text{et } \tilde{\psi}^s = \psi^s \ , \text{ et donc:}$$

$\psi^{s_\mu}(0) = \psi_\mu(s_\mu) = P(s_\mu)h \rightarrow \psi^s(0) = \psi(s) = P(s)h$, d'où la continuité faible de $t \mapsto P(t)h$, ce qui prouve (2.22).

<u>*LEMME 2.6.*</u>:*On a* : $|P(t)h| \leq c|h| \ \forall h \in H, \ \forall t \in [0,T]$.

<u>Démonstration:</u> On considère comme précédemment le système:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} + A\phi + D_1(.)\psi = 0 \\ \frac{d\psi}{dt} + A^*\psi \quad D_2(.)\phi = 0 \\ \phi(s) = h \ , \ \psi(T) = 0 \ , \ \phi,\psi \in L^2(s,T;V) \ . \end{cases}$$

En procédant de nouveau comme au Lemme 2.2, on obtient l'inégalité:

$$|\psi(s)|^2 \leq 2\frac{T}{\alpha} c^2|h|^2 + 2(\frac{T^3}{\alpha} c'^2 + \lambda) \int_s^T |\psi(t)|^2 dt$$

et comme on a déjà vu que les constantes étaient indépendantes de s, on peut appliquer l'inégalité de Gronwall:

$|\psi(s)|^2 \leq c|h|^2$, d'où le résultat puisque $\psi(s) = P(s)h$.

On va maintenant justifier le fait que l'opérateur P vérifie l'équation de Riccati :

$$\frac{dP}{dt} + PA + A^*P + PD_1P = D_2 \quad t \in \,]0,T[\;,\; P(T) = 0 \tag{2.26}$$

et que la fonction r vérifie :

$$\frac{dr}{dt} + A^*r + PD_1r = Pf + g \quad t \in \,]0,T[\quad r(T) = 0 \tag{2.27}$$

On utilise, comme Lions [13] , la méthode de Faedo-Galerkin.

2.3. La dimension finie

Soit $(w_1,\ldots,w_n,\ldots)$ une base hilbertienne de V. On définit $y_m(v_1,v_2)$, l'état approché d'ordre m, par :

$$(2.28) \begin{cases} (\frac{d}{dt} y_m(v_1,v_2),w_j) + a(y_m(v_1,v_2),w_j) = (f + B_1(.)v_1 + B_2(.)v_2,w_j) \\ \qquad\qquad 1 \leq j \leq m \\ y_m(0;v_1,v_2) = y_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{im}w_i \to y_0 \text{ dans H fort quand } m \to \infty \end{cases}$$

La fonction coût J_m est donnée par :

$$(2.29) \quad J_m(v_1,v_2) = \int_0^T \{\| C(t)y_m(t;v_1,v_2) - z_d(t)\|_F^2 + (N_1(t)v_1(t),v_1(t))_{E_1}$$
$$(N_2(t)v_2(t),v_2(t))_{E_2}\}dt .$$

On cherche alors (u_1^m,u_2^m) point-selle en boucle ouverte de J_m :

$$(2.30) \begin{cases} (u_1^m,u_2^m) \in L^2(0,T;E_1) \times L^2(0,T;E_2) \\ J_m(u_1^m,v_2) \leq J_m(u_1^m,u_2^m) \leq J_m(v_1,u_2^m) \\ \forall\, v_1 \in L^2(0,T;E_1) \;,\; \forall\, v_2 \in L^2(0,T;E_2) \end{cases}$$

Sous l'hypothèse (H1) : $\nu_1 > 0$ et $\nu_2 > \gamma_2^2$, (2.30) admet une solution unique.

On introduit l'état adjoint p_m approché d'ordre m :

$$(2.31) \begin{cases} (\frac{d}{dt}p_m,w_j) + a^*(p_m,w_j) = (D_2(.)y_m + g,w_j) \;,\; 1 \leq j \leq m \\ p_m(T) = 0 \;,\; p_m \in L^2(0,T;V_m) \end{cases}$$

V_m étant l'espace vectoriel engendré par la base : $(w_1,\ldots,w_m)$.

Alors :

(2.32) $\quad u_1^m = N_1^{-1}(.)i_{E_1}^{-1}B_1^*(.)p_m \quad , \quad u_2^m = N_2^{-1}(.)i_{E_2}^{-1}B_2^*(.)p_m$

et en éliminant u_1^m et u_2^m dans (2.28), on obtient :

$$(2.33)\quad \begin{cases} (\frac{dy}{dt}m, w_j) + a(y_m, w_j) + (D_1(.)p_m, w_j) = (f, w_j) & \\ (\frac{dp}{dt}m, w_j) + a^*(p_m, w_j) \quad (D_2(.)y_m, w_j) = (g, w_j) & 1 \leq j \leq m \\ y_m(0) = y_{om} \; , \; p_m(T) = 0 \; , \; y_m, p_m \in L^2(0,T;V_m) \; . \end{cases}$$

On peut alors énoncer le :

<u>*THEOREME 2.2*</u> : *Sous les hypothèses précédentes, et si l'injection de* V *dans* H *est compacte, on a :*

$y_m \dashrightarrow y \; , \; p_m \dashrightarrow p$ *dans* $L^2(0,T;V)$ *fort*

$u_k^m \to u_k$ *dans* $L^2(0,T;E_k)$ *fort*, $k = 1,2$,

lorsque $m \to \infty$.

<u>Démonstration</u> : On considère le système (2.33) entre s et T , $0 \leq s < T$, dont la solution (y_m, p_m) est donnée sous la forme :

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^m \theta_{im}(t)w_i \; , \; p_m(t) = \sum_{i=1}^m \pi_{im}(t)w_i \; .$$

On multiplie la seconde équation de (2.33) par $\pi_{im}(t)$, on somme sur i de 1 à m et on intègre entre s et T pour obtenir :

$$\int_s^T \{(\frac{dp}{dt}m, p_m) + a(p_m, p_m)\}dt = \int_s^T \{(D_2(t)y_m(t), p_m(t)) + (g(t), p_m(t))\}dt$$

et donc :

$$|p_m(s)|^2 + 2\alpha \int_s^T \| p_m\|^2 dt \leq 2 \int_s^T (\| D_2(t)y_m(t)\|_{V'} + \| g(t)\|_{V'}) \| p_m(t)\| \, dt + $$
$$+ 2\lambda \int_s^T |p_m(t)|^2 dt \; .$$

Soit :

$$(2.34)\quad |p_m(s)|^2 + \alpha \int_s^T \| p_m\|^2 dt \leq \frac{1}{\alpha} \int_s^T (\| D_2(t)y_m(t)\|_{V'} + \| g(t)\|_{V'})^2 dt + $$
$$+ 2\lambda \int_s^T |p_m(t)|^2 dt \; .$$

On écrit y_m à l'aide du semi-groupe Λ_m approché d'ordre m :

$y_m(t) = \Lambda_m(t-s)y_{om} + \int_s^t \Lambda_m(t-\sigma)(-D_1(\sigma)p_m(\sigma)+ f(\sigma))d\sigma \ , \quad s \leq t \leq T$

et donc, puisque $\| \Lambda_m(t)\| \leq e^{\lambda t}$, $\forall t \geq 0$, on a:

(2.35) $\quad ||D_2(t)y_m(t)||_{V'} \leq c + c'|y_{om}| + c'' \int_s^T |p_m(t)|dt$ •

En reportant (2.35) dans (2.34),on obtient , après un rapide calcul:

$$|p_m(t)|^2 + \alpha \int_s^T \| p_m\|^2 dt \leq c_1 + c_2|y_{om}|^2 + c_3 \int_s^T |p_m(t)|^2 dt$$

toutes les constantes étant indépendantes de m et de s.

Et comme $y_{om} \to y_o$ dans H fort, on a: $|y_{om}|^2 \leq$ constante indépendante de m et s.

Donc:

$$|p_m(t)|^2 + \alpha \int_s^T \| p_m\|^2 \, dt \leq K_1 + K_2 \int_s^T |p_m(t)|^2 \, dt$$

et l'inégalité de Gronwall donne:

$$|p_m(s)|^2 \leq c \ , \int_s^T \| p_m\|^2 \, dt \leq c \ , \quad 0 \leq s < T \ ,$$

donc , en particulier pour s = 0 :

(2.36) $\quad |p_m(0)|^2 \leq c \ , \int_s^T \| p_m\|^2 \, dt \leq c$.

En introduisant comme au Lemme 2.2 : $\Phi_m(t)= e^{-\lambda t}y_m(t)$, on montre facilement que:

$$|\Phi_m(T)|^2 + \alpha \int_s^T \| \Phi_m\|^2 \, dt \leq c + |y_{om}|^2 \leq c'$$

soit:

(2.37) $\quad |y_m(T)| \leq c \ , \quad \int_0^T \| y_m\|^2 dt \leq c$

donc, avec (2.36), on peut extraire une sous-suite (y_μ,p_μ) telle que :

$$(2.38) \quad \begin{cases} y_\mu \to \tilde{y} & \text{dans } L^2(0,T;V) \text{ faible} \\ p_\mu \to \tilde{p} & \text{dans } L^2(0,T;V) \text{ faible} \end{cases}$$

et par le même argument de linéarité et de continuité que précédemment, on peut passer à la limite dans (2.33) :

$$(2.39) \quad \begin{cases} (\frac{d\tilde{y}}{dt} ,\phi) + a(\tilde{y},\phi) + (D_1(.)\tilde{p},\phi) = (f,\phi) & \forall \phi \in V \\ (\frac{d\tilde{p}}{dt} ,\phi) + a^*(\tilde{p},\phi) \quad (D_2(.)\tilde{y},\phi) = (g,\phi) & \forall \phi \in V \\ \tilde{y}(0) = y_o \ , \ \tilde{p}(T) = 0 \ , \ \tilde{y},\tilde{p} \in L^2(0,T;V) \end{cases}$$

et compte tenu de l'unicité de la solution de (2.39), on a : $\tilde{y} = y$, $\tilde{p} = p$

Donc, d'après (2.32), on a : $u_k^m \rightharpoonup u_k$ dans $L^2(0,T;E_k)$ faible, $k = 1,2$.

Reste à démontrer la convergence forte.

Soit : $J_m(v_1,v_2) = \int_0^T \{ \| Cy_m(v_1,v_2) \quad z_d \|_F^2 + (N_1 v_1, v_1)_{E_1} \quad (N_2 v_2, v_2)_{E_2} \} dt$

les opérateurs $C(t)$, $N_1(t)$ et $N_2(t)$ étant notés, pour simplifier, C, N_1 et N_2.

On sait, comme conséquence de la convergence de la méthode de Faedo Galerkin (Lions [13]), que :

$$y_m(v_1,v_2) \xrightarrow[m\to\infty]{} y(v_1,v_2) \text{ dans } L^2(0,T;V) \text{ fort}$$

$$y_m(u_1^m,u_2) \xrightarrow[m\to\infty]{} y(u_1,u_2) \text{ dans } L^2(0,T;V) \text{ faible}$$

$$y_m(u_1,u_2^m) \xrightarrow[m\to\infty]{} y(u_1,u_2) \text{ dans } L^2(0,T;V) \text{ faible.}$$

Comme $J(v_1,v_2)$ est faiblement s.c.i. pour v_2 fixé, on a :

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} \; J_m(u_1^m,u_2) \geq \int_0^T \{ \| Cy(u_1,u_2) \quad z_d \|_F^2 + (N_1 u_1, u_1)_{E_1} \quad (N_2 u_2, u_2)_{E_2} \} dt$$

$$= J(u_1,u_2)$$

puisque $u_1^m \rightharpoonup u_1$ dans $L^2(0,T;E_1)$ faible.

D'autre part, comme $J(v_1,v_2)$ est faiblement s.c.s. à v_1 fixé, et comme $u_2^m \rightharpoonup u_2$ dans $L^2(0,T;E_2)$ faible, on a :

$$\overline{\lim}_{m\to\infty} J_m(u_1,u_2^m) \leq J(u_1,u_2)$$

Finalement, comme $J_m(u_1^m,u_2) \leq J_m(u_1^m,u_2^m) \leq J_m(u_1,u_2^m)$ pour tout $m > 0$, on a :

$$J(u_1,u_2) = \underline{\lim}_{m\to\infty} \; J_m(u_1^m,u_2) = \overline{\lim}_{m\to\infty} \; J_m(u_1,u_2^m)$$

donc on peut extraire une sous-suite telle que :

$$\lim_{\mu\to\infty} \; J_\mu(u_1^\mu,u_2) = \lim_{\mu\to\infty} \; J_\mu(u_1,u_2^\mu) = J(u_1,u_2) \text{ et donc :}$$

$$\lim_{\mu\to\infty} \; J_\mu(u_1^\mu,u_2^\mu) = J(u_1,u_2) \; .$$

Mais comme la limite est indépendante de la sous-suite, c'est toute la suite

$J_m(u_1^m,u_2^m)$ qui converge vers $J(u_1,u_2)$; de même, on a :

$$\lim_{m\to\infty} J_m(u_1^m,u_2) = J(u_1,u_2) \quad \text{donc nécessairement}$$

$$\int_0^T (N_1 u_1^m, u_1^m)dt \longrightarrow \int_0^T (N_1, u_1, u_1)dt$$

et comme $\left(\int_0^T (N_1 v_1, v_1)_{E_1} dt\right)^{1/2}$ est une norme équivalente à $\| v_1 \|_{L^2(0,T;E_1)}$,

on obtient : $\lim\limits_{m\to\infty} \| u_1^m \|_{L^2(0,T;E_1)} = \| u_1 \|_{L^2(0,T;E_1)}$, ce qui suffit pour

prouver que : $u_1^m \to u_1$ dans $L^2(0,T;E_1)$ fort.

En procédant de la même façon, on a :

$$\lim_{m\to\infty} J_m(u_1,u_2^m) = J(u_1,u_2) \ ,$$

et donc, nécessairement , $\int_0^T (N_2 u_2^m, u_2^m)dt \to \int_0^T (N_2\ u_2, u_2)dt$

donc : $u_2^m \to u_2$ dans $L^2 0,T;E_2)$fort.

Alors, d'après (2.28), on a, $\forall\ m > 0$:

$$\frac{1}{2}|y_m(T)|^2 \quad \frac{1}{2}|y_{om}|^2 + \int_0^T a(y_m,y_m)dt = \int_0^T (f(t) + B_1(t)u_1^m + B_2(t)u_2^m, y_m)dt$$

et donc :

$$\lim_{m\to\infty} \left\{ \frac{1}{2}|y_m(T)|^2 + \int_0^T a(y_m,y_m)dt \right\} = \int_0^T (f(t)+B_1(t)u_1+B_2(t)u_2, y)dt + \frac{1}{2}|y_o|^2$$

$$= \frac{1}{2}|y(t)|^2 + \int_0^T a(y,y)dt$$

puisque $y_m \to y$ dans $L^2(0,T;V)$ faible et $u_1^m \to u_1$ et $u_2^m \to u_2$ dans $L^2(0,T;E_1)$ et $L^2(0,T;E_2)$ forts.

On a donc : $\lim\limits_{m\to\infty}\left\{ \frac{1}{2}|y_m(T) \quad y(T)|^2 + \int_0^T a(y_m - y, y_m \quad y)dt \right\} =$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{2}|y_m(T)|^2 \quad (y_m(T),y(T)) \quad \int_0^T a(y_m \quad y,y)dt \quad \int_0^T a(y,y_m)dt\right\}$$

$$+ \lim_{m\to\infty} \left\{\frac{1}{2}|y_m(T)|^2 + \int_0^T a(y_m,y_m)dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2}|y(T)|^2 \quad \int_0^T a(y,y)dt + \frac{1}{2}|y(T)|^2 + \int_0^T a(y,y)dt = 0$$

et comme : $\frac{1}{2}|y_m(T)-y(T)|^2 + \int_0^T a(y_m\ y, y_m\ y)dt \geq \frac{1}{2}|y_m(T)-y(T)|^2 +$

$$+ \alpha\int_0^T \| y_m\ y\|^2 dt \quad \lambda\int_0^T |y_m\ y|^2 dt$$

on obtient, pour m suffisamment grand :

$$\frac{1}{2}|y_m(T) \quad y(T)|^2 + \alpha \int_0^T \| y_m\ y\|^2 dt \leq \varepsilon + \lambda \int_0^T |y_m(t) \quad y(t)|^2 dt$$

et d'après l'inégalité de Gronwall :

$$\alpha \int_0^T \| y_m \quad y\|^2 dt \leq C\varepsilon$$

donc : $\lim\limits_{m\to\infty} \| y_m \quad y\|_{L^2(0,T;V)} = 0$

On procède de la même façon pour la convergence forte des p_m : d'après (3.36), on a :

$$\frac{1}{2}|p_m(0)|^2 + \int_0^T a^*(p_m,p_m)dt = \int_0^T (D_2(t)y_m + g, p_m)dt$$

donc :

$$\lim_{m\to\infty} \{\frac{1}{2}|p_m(0)|^2 + \int_0^T a^*(p_m,p_m)dt\} = \int_0^T (D_2(t)y + g, p)dt$$

$$= \frac{1}{2}|p(0)|^2 + \int_0^T a^*(p,p)dt \ .$$

donc :

$$\lim_{m\to\infty} \{\frac{1}{2}|p_m(0) \quad p(0)|^2 + \int_0^T a^*(p_m - p, p_m \quad p)dt\} = 0$$

et comme :

$$\frac{1}{2}|p_m(0) - p(0)|^2 + \int_0^T a^*(p_m \quad p, p_m \quad p)dt \geq \frac{1}{2}|p_m(0) \quad p(0)|^2 +$$

$$+ \alpha \int_0^T \| p_m \quad p\|^2 dt \quad \lambda \int_0^T |p_m \quad p|^2 dt$$

on a, pour m suffisamment grand :

$$\alpha \int_0^T \| p_m \quad p\|^2 dt \leq C\varepsilon$$

d'où la convergence forte, ce qui achève de prouver le théorème.

2.4. Fin de la démonstration

Il reste à montrer d'une part que P_m vérifie une équation de Riccati et, d'autre part, que l'on peut passer à la limite pour avoir l'existence d'une solution de (1.20), (1.21).

Comme la démonstration, classique dans le cas du contrôle optimal, s'adapte entièrement, on renvoie le lecteur à (Lions [13]. Théorèmes 4.2 à 4.4, pages 160 à 165).

Enfin, comme
$$\begin{cases} u_1^*(t) = -N_1^{-1}(t)\; i_{E_1}^{-1}\; B_1^*(t)p(t) \\ u_2^*(t) = N_2^{-1}(t)\; i_{E_2}^{-1}\; B_2^*(t)p(t) \end{cases} \quad \text{p.p. } t \in [0,T]$$

et comme $p(t) = P(t)y(t) + r(t)$, (2.2) est établi, ce qui achève la démonstration.

On donne maintenant une synthèse des résultats des chapitres 1 et 2 dans le :

COROLLAIRE 2.1. : *Si (2.1) a lieu et si l'une quelconque des hypothèses suivantes est vérifiée :*

(H1) $\nu_1 > 0$ *et* $\nu_2 > \mathcal{G}_2^2$

(H2) $D_1(t) \geq 0 \quad \forall\, t \in [0,T]$

Alors il existe un opérateur $P(t)$ *et une fonction* r *solutions de (1.20) et (1.21), et le couple* (u_1,u_2) *défini par :*

$$\begin{cases} u_1(t,y) = N_1^{-1}(t)\; i_{E_1}^{-1}\; B_1^*(t)(P(t)y + r(t)) \\ u_2(t,y) = N_2^{-1}(t)\; i_{E_2}^{-1}\; B_2^*(t)(P(t)y + r(t) \end{cases}$$

est un point-selle en boucle fermée dans $L^2(0,T;E_1) \times L^2(0,T;E_2)$ *de* J .

En outre, si (H1) *a lieu,* $(\bar{u}_1,u_2)$ *défini par :*

$$u_1(t) = u_1(t,y(t)) \quad , \quad u_2(t) = u_2(t,y(t))$$

où $y(t)$ *est donné par la résolution de :*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + (A + D_1(.)P(.))y = f \quad D_1(.)r \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

est un point-selle en boucle ouverte de J.

On a donc, pour ce type de jeu différentiel, un procédé unique donnant le point-selle en boucle fermée et en boucle ouverte. Cette propriété n'existe plus forcément dans d'autres types de jeux différentiels à somme non nulle. En particulier, en ce qui concerne l'équilibre de Nash pour des fonctionnelles quadratiques, l'équation de Riccati donnant la solution en boucle ouverte n'est pas la même que celle qui donne la solution en boucle fermée (Bensoussan [3]).

On va maintenant étudier une équation équivalente à l'équation de Riccati, appelée équation d'Isaacs-Bellman qui, au lieu de donner un opérateur P(t), donne la valeur du jeu :

$$\mathcal{V}(s,h) = \frac{1}{2}(P(s)h,h)$$

$$= \frac{1}{2} \underset{v_1}{\mathrm{Min}}\ \underset{v_2}{\mathrm{Max}}\ \bar{J}^h_{s,T}(v_1,v_2) = \frac{1}{2} \underset{v_2}{\mathrm{Max}}\ \underset{v_1}{\mathrm{Min}}\ \bar{J}^h_{s,T}(v_1,v_2)$$

$\bar{J}^h_{s,T}(v_1,v_2)$ étant défini comme au lemme 2.1.

3. L'EQUATION D'ISAACS - BELLMAN

On considère le cas $f = 0$ et $z_d = 0$ pour simplifier.

L'état est donné par :

$$(3.1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = B_1(.)v_1 + B_2(.)v_2 & s < t < T \\ y(s) = h \end{cases}$$

et la fonction coût par :

$$(3.2)\quad J^h_{s,T}(v_1,v_2) = \int_s^T \| C(t)y(t;v_1,v_2)\|^2_F dt + \int_s^T \{(N_1(t)v_1(t,y),v_1(t,y))_{E_1}$$

$$(N_2(t)v_2(t,y),v_2(t,y))_{E_2}\}dt$$

On se place dans le cadre du corollaire 2.1.

Posons : $V(h,s)$: valeur du jeu pour la condition initiale (s,h) :

$$(3.3)\quad V(h,s) = \frac{1}{2} \underset{v_1\varepsilon \mathcal{U}_1}{\mathrm{Min}} \ \underset{v_2\varepsilon \mathcal{U}_2}{\mathrm{Max}} \ J^h_{s,T}(v_1,v_2) = \frac{1}{2} \underset{v_2\varepsilon \mathcal{U}_2}{\mathrm{Max}} \ \underset{v_1\varepsilon \mathcal{U}_1}{\mathrm{Min}} \ J^h_{s,T}(v_1,v_2)$$

$\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ étant les ensembles de stratégies en boucle fermée dans $L^2(0,T;E_1)$ et $L^2(0,T;E_2)$ pour les joueurs 1 et 2.

3.1. Le cas (H2) : $D_1(t) \geq 0 \quad \forall\ t\ \varepsilon\ [0,T]$.

Comme Bensoussan [2] , on considère a priori le problème de minimum où l'état est donné par :

$$(3.4)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = D_1^{1/2}(.)v & s < t < T \\ y(s) = h \end{cases}$$

et la fonction coût :

$$(3.5)\quad I^h_{s,T}(v) = \int_s^T \{\| C(t)y(t;v)\|^2_F + |v|^2\}dt ,$$

le minimum étant cherché dans $L^2(s,T;H)$.

Soit alors $V(h,s) = \frac{1}{2}(P(s)h,h) = \frac{1}{2} \underset{v\in L^2(s,T;H)}{\mathrm{Min}} \ I^h_{s,T}(v)$

L'existence du minimum et de l'opérateur P sont assurés par la théorie classique (Lions [13])

On sait alors que $V(h,s)$ vérifie l'équation d'Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial V}{\partial s}(h,s) + \underset{e \varepsilon H}{\mathrm{Min}}\, H(h, \frac{\partial V}{\partial h}(h,s), s, e) = 0 \quad \forall\, h \,\varepsilon\, V \text{ , p.p. } s \,\varepsilon\, [0,T]$$

(3.6)

$$V(h,T) = 0$$

avec :

(3.7) $$H(h,p,s,e) = (\quad Ah \quad + D_1^{1/2}(s)e, p) + \frac{1}{2}(\| C(s)h \|_F^2 + |e|^2) \text{ , } \forall\, p \,\varepsilon\, V \text{ .}$$

On a alors le théorème :

THEOREME 3.1.: Sous les hypothèses du corollaire 2.1 avec (H2), *$V(h,s)$ définie par* (3.3) *est continue de* $[0,T] \times H$ *dans* $\mathbb{R}_+$, $\frac{\partial V}{\partial s}$ *et* $\frac{\partial V}{\partial h}$ *existent* $\forall\, h \,\varepsilon\, V$ *et* p.p. $s \,\varepsilon\, [0,T]$ *et* $V(h,s)$ *vérifie l'équation d'Isaacs-Bellman :*

(3.8) $$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial s}(h,s) + \underset{e_1 \varepsilon E_1}{\mathrm{Min}}\ \underset{e_2 \varepsilon E_2}{\mathrm{Max}}\ I(h, \frac{\partial V}{\partial h}(h,s), s, e_1, e_2) = 0 = \\ = \frac{\partial V}{\partial s}(h,s) + \underset{e_2 \varepsilon E_2}{\mathrm{Max}}\ \underset{e_1 \varepsilon E_1}{\mathrm{Min}}\ I(h, \frac{\partial V}{\partial h}(h,s), s, e_1, e_2) \text{ , } \forall\, h \,\varepsilon\, V, \text{ p.p. } s \,\varepsilon\, [0,T]. \\ V(h,T) = 0 \end{cases}$$

avec :

(3.9) $$I(h,p,s,e_1,e_2) = (p, B_1(s)e_1 + B_2(s)e_2 \quad Ah) + \frac{1}{2}[\| C(s)h \|_F^2 + $$

$$+ (N_1(s)e_1, e_1)_{E_1} \quad (N_2(s)e_2, e_2)_{E_2}] \text{ , } \forall\, p \,\varepsilon\, V \text{ .}$$

Démonstration : On va comparer :

$$\underset{e_2}{\mathrm{Max}}\ \underset{e_1}{\mathrm{Min}}\ I(h,p,s,e_1,e_2) = \underset{e_1}{\mathrm{Min}}\ \underset{e_2}{\mathrm{Max}}\ I(h,p,s,e_1,e_2) \quad \text{et} \quad \underset{e}{\mathrm{Min}}\ H(h,p,s,e) \text{ .}$$

Comme $I(h,p,s,e_1,e_2) = ((B_1^*(s)p, e_1) + \frac{1}{2}(N_1(s)e_1, e_1)) +$

$$+ ((B_2^*(s)p, e_2) \quad \frac{1}{2}(N_2(s)e_2, e_2)) \quad (p, Ah) + \frac{1}{2} \| C(s)h \|_F^2$$

on voit facilement que le point-selle sur $E_1 \times E_2$ de I est réalisé pour :

$$\begin{cases} (B_1^*(s)p + N_1(s)e_1^*, e_1) = 0 \quad \forall\, e_1 \,\varepsilon\, E_1 \\ (B_2^*(s)p \quad N_2(s)e_2^*, e_2) = 0 \quad \forall\, e_2 \,\varepsilon\, E_2 \end{cases}$$

ou : $e_1^* = \quad N_1^{-1}(s)\, i_{E_1}^{-1}\, B_1^*(s)p$, $e_2^* = N_2^{-1}(s)\, i_{E_2}^{-1}\, B_2^*(s)p$

et donc $I(h,p,s,e_1^*,e_2^*) = \frac{1}{2} \|C(s)h\|_F^2 \quad (p,Ah) \quad \frac{1}{2}(D_1(s)p,p)$.

Or, un rapide calcul montre que :

$$\underset{e \in H}{\text{Min}}\ H(h,p,s,e) = \frac{1}{2} \| C(s)h \|_F^2 \quad (p,Ah) \quad \frac{1}{2} (D_1(s)p,p)$$

On a alors (3.8) en remplaçant dans (3.5) $\underset{e \in H}{\text{Min}}\ H(h \frac{\partial V}{\partial h}, s, e)$ par

$$\underset{e_1 \in E_1}{\text{Min}}\ \underset{e_2 \in E_2}{\text{Max}}\ I(h, \frac{\partial V}{\partial h}, s, e_1, e_2)$$

Reste à montrer que $V(h,s)$ définie par (3.6) et (3.8) vérifie (3.3). Pour cela, il suffit de remarquer que

$(P(s)h,h) = 2V(h,s)$ et que $P(s)$ vérifie (1.20), qu'il soit donné par le problème de minimum ou par le problème de point-selle, et le théorème est démontré.

3.2. Le cas (H1) : $\nu_1 > 0$ et $\nu_2 > \mathfrak{S}_2^2$

THEOREME 3.2.: Sous les hypothèses du corollaire 2.1 avec (H1) *on a la conclusion du théorème 3.1.*

Démonstration : On a : $V(h,s) = \frac{1}{2}(P(s)h,h)$ donc V est continue de $[0,T] \times H$ dans $\mathbb{R}_+$ grâce aux lemmes 2.2 à 2.5 et $\frac{\partial V}{\partial s}(h,s) = \frac{1}{2}(\frac{dP(s)}{ds}h,h), \frac{\partial V}{\partial h}(h,s) = P(s)h$ existent $\forall\ h \in V$ et p.p. $s \in [0,T]$ grâce au théorème 2.1. D'après l'équation de Riccati, on a $\forall\ h \in V$ et p.p. $s \in [0,T]$:

$$(\frac{dP}{ds}(s)h,h) + 2(P(s)h,Ah) + (N_1^{-1}(s)\ i_{E_1}^{-1}\ B_1^*(s)P(s)h, i_{E_1}^{-1}\ B_1^*(s)P(s)h)_{E_1}$$

$$- (N_2^{-1}(s)\ i_{E_2}^{-1}\ B_2^*(s)P(s)h, i_{E_2}^{-1}\ B_2^*(s)P(s)h)_{E_2} = (D_2(s)h,h) = \| C(s)h \|_F^2$$

Posons alors :

$$(3.10)\quad I°(h,p,s) = \frac{1}{2} \| C(s)h \|_F^2 \quad (p,Ah) \quad \frac{1}{2} (N_1^{-1}(s) i_{E_1}^{-1} B_1^*(s)p, i_{E_1}^{-1} B_1^*(s)p)_{E_1}$$

$$+ \frac{1}{2}(N_2^{-1}(s) i_{E_2}^{-1} B_2^*(s)p, i_{E_2}^{-1} B_2^*(s)p)_{E_2}.$$

Compte-tenu des formules donnant $\frac{\partial V}{\partial s}$ et $\frac{\partial V}{\partial h}$, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial s}(h,s) + I^\circ(h,\dfrac{\partial V}{\partial h}(h,s),s) = 0 \quad \forall\ h \in V \text{ et p.p. } s \in [0,T]. \\ V(h,T) = 0 \quad (\text{puisque } P(T) = 0) \end{cases}$$

On vérifie alors comme au paragraphe précédent que l'on a :

$$I^\circ(h,p,s) = \underset{e_1\in E_1}{\mathrm{Min}}\ \underset{e_2\in E_2}{\mathrm{Max}}\ I(h,p,s,e_1,e_2) = \underset{e_2\in E_2}{\mathrm{Max}}\ \underset{e_1\in E_1}{\mathrm{Min}}\ I(h,p,s,e_1,e_2)\ ,$$

ce qui prouve le théorème.

IIème PARTIE

4. POINT-SELLE EN BOUCLE OUVERTE EN HORIZON INFINI

4.1. Hypothèses et notations

Le but de ce chapitre est l'étude du cas $T = +\infty$ pour des stratégies en boucle ouverte.

On fait les hypothèses suivantes :

V et H sont des Hilberts séparables réels, tels que $V \subset H$, avec injection continue, V dense dans H.

$$(4.1) \quad \begin{cases} a(.,.) \text{ est une forme bilinéaire continue sur } V \times V \text{ telle que :} \\ \exists \alpha > 0 : a(\phi,\phi) \geq \alpha \|\phi\|^2 \quad \forall \phi \in V . \end{cases}$$

$$(4.2) \quad \begin{cases} E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont des Hilberts réels séparables} \\ B_i \in \mathcal{L}(E_i;H) \ , \ i = 1,2 \ . \\ f \in L^2(0,\infty;H) \ , \ y_o \in H \ . \end{cases}$$

On peut alors définir l'état y comme solution unique dans $L^2(0,\infty;V)$, pour tout couple (v_1,v_2) de $L^2(0,\infty;E_1) \times L^2(0,\infty;E_2)$, de l'équation :

$$(4.3) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = B_1v_1 + B_2v_2 + f \ , \qquad t > 0 \\ y(0) = y_o \quad , \quad y \in L^2(0,\infty;V) \end{cases}$$

où $\langle A\phi,\psi\rangle = a(\phi,\psi) \quad \forall \phi,\psi \in V$.

On considère la fonction coût :

$$(4.4) \quad J(v_1,v_2) = \int_0^\infty \{\| Cy(v_1,v_2) - z_d\|_F^2 + (N_1v_1,v_1)_{E_1} \quad (N_2v_2,v_2)_{E_2}\}dt$$

avec :

$$(4.5) \quad \begin{cases} F : \text{Hilbert réel séparable} \\ C \in \mathcal{L}(H;F) \\ N_i \in \mathcal{L}(E_i;E_i), N_i^* = N_i \text{ et } \exists \ \nu_i > 0 \text{ tel que :} \\ (N_iv_i,v_i)_{E_i} \geq \nu_i \|v_i\|_{E_i}^2 \quad \forall v_i \in E_i \ , \quad i = 1,2 \ . \end{cases}$$

Enfin on pose:

$$(4.6) \qquad \mathcal{G}^2_{2,\infty} = \frac{1}{\alpha^2} \| C \|^2_{\mathcal{L}(V;H)} \cdot \| B_2 \|^2_{\mathcal{L}(E_2;V')}$$

4.2. Théorème d'existence.

THEOREME 4.1.: *Sous les hypothèses (4.1) à (4.6) et si:*

$(H1)_\infty$: $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > \mathcal{G}^2_{2,\infty}$

Alors il existe un unique point-selle en boucle ouverte de J , *caractérisé par:*

$$(4.7) \quad \begin{cases} (u_1^*, u_2^*) \in L^2(0,\infty;E_1) \times L^2(0,\infty;E_2) \\ a_1(u_1^*, v_1) + b(u_2^*, v_1) \quad L_1(v_1) = 0 \quad \forall\, v_1 \in L^2(0,\infty;E_1) \\ a_2(u_2^*, v_2) + b^*(u_1^*, v_2) \quad L_2(v_2) = 0 \quad \forall\, v_2 \in L^2(0,\infty;E_2) \end{cases}$$

avec les notations :

$$(4.8) \quad \begin{cases} y(v_1,v_2) = G_1 v_1 + G_2 v_2 + \tilde{g} \\ a_1(v_1,w_1) = \int_0^\infty \{(N_1 v_1, w_1)_{E_1} + (CG_1 v_1, CG_1 w_1)_F\} dt \\ a_2(v_2,w_2) = \int_0^\infty \{(N_2 v_2, w_2)_{E_2} \quad (CG_2 v_2, CG_2 w_2)_F\} dt \\ b(v_2,v_1) = \int_0^\infty (CG_2 v_2, CG_1 v_1)_F dt \overset{\text{def}}{=} b^*(v_1,v_2) \\ L_1(v_1) = \int_0^\infty (z_d \quad C\tilde{g}, CG_1 v_1)_F dt \\ L_2(v_2) = \int_0^\infty (C\tilde{g} \quad z_d, CG_2 v_2)_F dt \end{cases}$$

Démonstration: Pour appliquer le résultat de Lemaire [12], il suffit de montrer l'existence de G_1, G_2 ,et $\tilde{g}$ vérifiant:

$$(4.9) \qquad y(v_1,v_2) = G_1 v_1 + G_2 v_2 + \tilde{g} \,, \quad \text{où :}$$

$G_i \in \mathcal{L}(L^2(0,\infty;E_i);L^2(0,\infty;V))$, i=1,2 , et $\tilde{g} \in W(0,\infty)$,

$$(4.10) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(G_i v_i) + A(G_i v_i) = B_i v_i, \quad t > 0 \\ (G_i v_i)(0) = 0 \qquad\qquad i = 1,2 \end{cases}$$

$$(4.11) \quad \begin{cases} \frac{d\tilde{g}}{dt} + A\tilde{g} = f \,, \quad t > 0 \\ \tilde{g}(0) = y_0 \end{cases}$$

Il suffit donc de montrer la continuité de G_i de $L^2(0,\infty;E_i)$ dans $L^2(0,\infty;V)$.

Soit alors une suite $\{v_i^n\}_{n \in N}$ de $L^2(0,\infty;E_i)$ vérifiant:

(4.12) $\lim\limits_{n\to\infty} v_i^n = v_i$ dans $L^2(0,\infty;E_i)$ fort .

Posons $y_i^n = G_i v_i^n$. D'après (4.10) on a :

(4.13) $\frac{dy_i^n}{dt} + Ay_i^n = B_i v_i^n$, $t > 0$, $y_i^n(0) = 0$.

Donc :

(4.14) $\int_0^\infty (\frac{dy_i^n}{dt}, y_i^n)\, dt + \int_0^\infty a(y_i^n, y_i^n)\, dt = \int_0^\infty (B_i v_i^n, y_i^n)\, dt$

Montrons que $\int_0^\infty (\frac{dy_i^n}{dt}, y_i^n)\, dt$ est une intégrale convergente :

comme $y_i^n \in W(0,\infty)$, on a , $\forall\ \tau > 0$: $\frac{1}{2}|y_i^n(\tau)|^2 = \int_0^\tau (\frac{dy_i^n}{dt}, y_i^n)\, dt$.

Et comme $y_i^n(\tau)$ est continu en τ et tend vers 0 lorsque $\tau\to\infty$, on a, par semi continuité inférieure de la norme : $0 = \underline{\lim}_{\tau\to\infty} \int_0^\tau (\frac{dy_i^n}{dt}, y_i^n) dt = \int_0^\infty (\frac{dy_i^n}{dt}, y_i^n) dt$.

De (4.14), on tire :

$$2\alpha \int_0^\infty \| y_i^n\|^2 dt \leq 2 \int_0^\infty \| B_i v_i^n\|_{V'} \, \| y_i^n\| \, dt \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \| B_i v_i^n\|^2_{V'} dt + \alpha \int_0^\infty \| y_i^n\|^2 dt$$

soit : $\int_0^\infty \| y_i^n\|^2 dt \leq \frac{1}{\alpha^2} \| B_i\|_{\mathcal{L}(E_i;V')} \int_0^\infty \| v_i^n\|^2_{E_i} dt$.

Et, d'après (4.12), on a :

$$\| y_i^n\|_{L^2(0,\infty;V)} \leq \text{constante indépendante de } n.$$

On peut donc extraire une sous-suite y_i qui converge faiblement vers z_i dans $L^2(0,\infty;V)$ et comme A et B_i sont linéaires et continus, donc faiblement continus on peut passer à la limite dans (4.13) :

(4.15) $\frac{dz_i}{dt} + Az_i = B_i v_i$, $t > 0$, $z_i(0) = 0$.

Mais, comme la solution de (4.15) est unique : $z_i = G_i v_i$, ce qui prouve la continuité faible et donc la continuité, $\forall\ i = 1,2$, et le théorème est prouvé.

<u>THEOREME 4.2.</u>: *Sous les hypothèses du théorème 4.1, le système :*

$$(4.16) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay + D_1 p = f \quad , & y(0) = y_o \\ \frac{dp}{dt} + A^* p - D_2 y = g \quad , & y,p \in L^2(0,\infty;V) \end{cases}$$

a une solution unique, avec :

$$D_1 = B_1 N_1^{-1} i_{E_1}^{-1} B_1^* \quad B_2 N_2^{-1} i_{E_2}^{-1} B_2^* \ , \quad D_2 = C^* i_F C \ \textit{et} \ g = C^* i_F z_d$$

Le point-selle en boucle ouverte (u_1^*, u_2^*) *de* J *est alors donné par :*

$$u_1^* = N_1^{-1} i_{E_1}^{-1} B_1^* p \quad , \quad u_2^* = N_2^{-1} i_{E_2}^{-1} B_2^* p \ .$$

Démonstration : D'après (4.7), (u_1^*, u_2^*) est caractérisé par :

$$(4.17) \quad \begin{cases} \int_0^\infty \{((C^* i_F(Cy \quad z_d), G_1 v_1) + (N_1 u_1^*, v_1)_{E_1}\} dt = 0 \quad \forall\, v_1 \in L^2(0,\infty;E_1) \\ \int_0^\infty \{((C^* i_F(Cy \quad z_d), G_2 v_2) \quad (N_2 u_2^*, v_2)_{E_2}\} dt = 0 \quad \forall\, v_2 \in L^2(0,\infty;E_2) \end{cases}$$

où $y = y(u_1^*, u_2^*)$.

Introduisons alors l'état adjoint p par :

$$(4.18) \quad -\frac{dp}{dt} + A^* p = C^* i_F(Cy - z_d) = D_2 y + g \qquad t \geq 0 \ , \ p \in L^2(0,\infty;V) \ .$$

On sait (Lions [13]) qu'un tel p existe et est unique, et vérifie :

$$\lim_{t \to \infty} |p(t)| = 0 \qquad \text{Donc :}$$

$\int_0^\infty (\frac{dp}{dt}, G_i v_i) dt = \int_0^\infty (p, \frac{d}{dt} G_i v_i) dt$, $i = 1,2$. Et (4.17) devient :

$$\begin{cases} \int_0^\infty (i_{E_1}^{-1} B_1^* p + N_1 u_1^*, v_1)_{E_1} dt = 0 \quad \forall\, v_1 \in L^2(0,\infty;E_1) \\ \int_0^\infty (i_{E_2}^{-1} B_2^* p \quad N_2 u_2^*, v_2)_{E_2} dt = 0 \quad \forall\, v_2 \in L^2(0,\infty;E_2) \ , \end{cases}$$

soit : $u_1^* = N_1^{-1} i_{E_1}^{-1} B_1^* p$, $u_2^* = N_2^{-1} i_{E_2}^{-1} B_2^* p$

et en éliminant (u_1^*, u_2^*) de l'état et de (4.18), on obtient (4.16), d'où le résultat, compte-tenu de l'unicité de (u_1^*, u_2^*)

Remarque 4.1.: On ne peut plus appliquer brutalement, à partir du système (4.16), les majorations du lemme 2.2 puisque l'intervalle de temps n'est pas borné et que ces majorations dépendent de T. On doit donc trouver d'autres méthodes pour montrer l'existence d'une solution de l'équation de Riccati

Avant d'aborder ce sujet au chapitre 5, montrons le :

<u>THEOREME 4.3.</u> : *Sous les hypothèses (4.1) à (4.6) et si :*

(H2) $D_1 \geq 0$

Alors le système (4.16) a une solution unique.

<u>Démonstration</u> : On se ramène au problème de minimum suivant :

$$(4.19) \qquad \frac{dy}{dt} + Ay = D_1^{1/2}v \quad , \quad t > 0 \quad , \quad y(0) = y_o$$

$K(v) = \int_0^\infty \{\| Cy - z_d \|_F^2 + |v|^2\}dt$, le minimum étant cherché dans $L^2(0,\infty;H)$.

Ce minimum existe et est unique d'après la théorie classique sur la minimisation des fonctionnelles convexes, et il vérifie :

$$(4.20) \qquad \int_0^\infty \{(D_2 y(u^*) + g, y(v) \quad y(0)) + (u^*,v)\}dt = 0 \quad \forall\, v \in L^2(0,\infty;H) \; .$$

Soit l'état adjoint (posant $y(u^*) = y$) :

$$(4.21) \qquad -\frac{dp}{dt} + A^*p = D_2 y + g \quad , \quad p \in L^2(0,\infty;V) \; .$$

Alors (4.20) devient :

$$\int_0^\infty (D_1^{1/2}p + u^*, v)dt = 0 \quad , \quad \forall\, v \in L^2(0,\infty;H) \; ,$$

soit : $u^* = - D_1^{1/2}p$. Alors dans (4.19) et (4.21) on obtient le système (4.16) et le théorème est démontré.

5. EQUATION DE RICCATI STATIONNAIRE ET POINT-SELLE EN BOUCLE FERMEE EN HORIZON INFINI

5.1. Introduction

On a vu au chapitre 4, qu'il existait, avec (H1), un point-selle en boucle ouverte sur l'intervalle $[0,\infty[$. On va maintenant chercher à en déduire, comme au chapitre 2, l'existence d'un opérateur P solution d'une équation de Riccati.

On va montrer, sous l'hypothèse (H1), l'existence d'un tel opérateur P par passage à la limite lorsque l'horizon T tend vers l'infini.

Pour cela, on pourra utiliser deux types de méthodes :

. une méthode liée à la croissance des opérateurs P_T en fonction de T (§ 5.2)

. une méthode plus générale, en l'absence de croissance, mais ne donnant des résultats de convergence que dans des espaces du type L^2_{loc} (§ 5.3).

Enfin, au § 5.4, on étudie le même problème avec l'hypothèse (H2). Les résultats sont ici plus généraux, grâce à l'emploi des concepts de stabili sabilité et de détectabilité.

Dans chaque paragraphe, on donne une interprétation des résultats sous forme d'existence de point-selle en boucle fermée.

Enfin, pour illustrer ces résultats, on donne une série d'exemples, envisageant aussi les limites de cette théorie.

On utilisera, dans ce qui suit, les notations suivantes (pour tout T > 0):

. $\beta_{s,T}$ est l'état dans l'intervalle $[s,T]$ donné par :

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\beta_{s,T} + A\beta_{s,T} = B_1v_1 + B_2v_2 \quad , \quad t \in]s,T[\\ \beta_{s,T}(s) = h \;. \end{cases}$$

Lorsque s = 0 ou lorsqu'aucune ambigüité n'est possible sur s, on écrit : $\beta_{s,T} = \beta_T$.

. $J^h_{s,T}$ est la fonctionnelle :

$$(5.2) \quad J^h_{s,T}(v_1,v_2) = \int_s^T\{||C\beta_{s,T}||^2_F + (N_1v_1,v_1)_{E_1} \quad (N_2v_2,v_2)_{E_2}\}dt \;.$$

. $u_1^{s,T}$ et $u_2^{s,T}$ sont les composantes du point-selle en boucle ouverte de $J^h_{s,T}$ sur $[s,T]$.

Par le lemme 2.4, on sait que :

(5.3) $\quad (P_T(s)h,h) = J^h_{s,T}(u_1^{s,T},u_2^{s,T})$

où $P_T(s)$ est solution dans l'intervalle $[0,T]$ de l'équation de Riccati (1.20).

. Si z est une fonction quelconque définie sur $[s,T]$, on note $\tilde{z}$ son prolongement par 0 sur $[0,\infty[$, en dehors de $[s,T]$.

On est maintenant en mesure d'exposer les résultats.

5.2. Méthode de croissance

On se place dans le cadre du chapitre 4 et on suppose, dans tout ce paragraphe, que (H1) a lieu :

$$\nu_1 > 0 \quad \text{et} \quad \nu_2 > \mathcal{G}^2_{2,\infty} .$$

On va étudier la croissance des opérateurs $P_T(t)$ et montrer que cette suite d'opérateurs a une limite qui vérifie l'équation de Riccati stationnaire. On commence par le :

LEMME 5.1. : *Soit* $s \geq 0$ *et soient* T_1,T_2 *tels que* $T_2 \geq T_1 > s$. *On a alors :*

(5.4) $\quad (P_{T_1}(s)h,h) \leq (P_{T_2}(s)h,h) \quad \forall\, h \in H$.

Démonstration : On note (u_1^T,u_2^T) le point-selle en boucle ouverte de $J^h_{s,T}$ et $r_{T_1}u_i^{T_2}$ la restriction de $u_i^{T_2}$ à $[s,T_1]$, i = 1,2. On note aussi :

$$\tilde{v}^{T_1} = \begin{cases} v^{T_1} & \text{sur } [s,T_1] \\ 0 & \text{sur }]T_1,T_2] \end{cases}$$

Alors, d'après la définition du point-selle en boucle ouverte de J^h_{s,T_1} :

(5.5) $\quad J^h_{s,T_1}(u_1^{T_1},u_2^{T_2}) \leq J^h_{s,T_1}(r_{T_1}u_1^{T_2},u_2^{T_1})$. Mais :

$$J^h_{s,T_1}(r_{T_1}u_1^{T_2},u_2^{T_1}) = \int_s^{T_1}\{\| C\beta_{T_1}(r_{T_1}u_1^{T_2},u_2^{T_1})\|_F^2 + (N_1 r_{T_1}u_1^{T_2}, r_{T_1}u_1^{T_2})_{E_1} - (N_2u_2^{T_1},u_2^{T_1})_{E_2}\}dt$$

$$\leq \int_s^{T_2}\{\| C\tilde{\beta}_{T_1}(r_{T_1}u_1^{T_2},u_2^{T_1})\|_F^2 + (N_1u_1^{T_2},u_1^{T_2})_{E_1} \quad (N_2\tilde{u}_2^{T_1},\tilde{u}_2^{T_1})_{E_2}\}dt$$

$$\leq \int_s^{T_2}\{\| C\beta_{T_2}(u_1^{T_2},\tilde{u}_2^{T_1})\|_F^2 + (N_1u_1^{T_2},u_1^{T_2})_{E_1} \quad (N_2\tilde{u}_2^{T_1},\tilde{u}_2^{T_1})_{E_2}\}dt$$

$= J^h_{s,T}(u_1^{T_2},\tilde{u}_2^{T_1}) \leq J^h_{s,T}(u_1^{T_2},u_2^{T_2})$ par définition du point-selle en boucle ouverte de J^h_{s,T_2} .

Comme, par ailleurs : $(P_{T_2}(s)h,h) = J^h_{s,T_2}(u_1^{T_2},u_2^{T_2})$, le résultat est démontré.

Remarque 5.1.: La suite des valeurs $V_T(s,h) = \frac{1}{2}(P_T(s)h,h)$ est donc croissante en T, à h et s fixés . Par suite, plus la durée du jeu est longue, plus le jeu est favorable au joueur 2. Mais le résultat n'est pas général, comme on le verra au § 5.3 . Il est essentiellement dû ici à la linéarité du système et à la positivité du terme : $\int_s^T \| C\beta_T\|_F^2 dt$.

LEMME 5.2.: *Il existe un opérateur* P *linéaire, positif ou nul, auto-adjoint de* $\mathcal{L}(H;H)$, *indépendant du temps, vérifiant pour* s <∞ *fixé :*

$$P = \lim_{T\to\infty} P_T(s) \quad \textit{pour la topologie forte des opérateurs.}$$

Démonstration : On montre d'abord que l'on peut trouver une constante c indépendante de T et de t telle que :

$$\forall\ T \geq 0\ ,\ \forall\ t \leq T\ ,\ \| P_T(t)\|_{\mathcal{L}(H;H)} \leq c\ .$$

On a :

$$(5.6) \qquad (P_T(s)h,h) = J^h_{s,T}(u_1^{s,T},u_2^{s,T}) \leq J^h_{s,T}(0,u_2^{s,T})\ .$$

Or : $J^h_{s,T}(0,u_2^{s,T}) = \int_s^T\{\| C\beta_{s,T}(0,u_2^{s,T})\|_F^2 \quad (N_2u_2^{s,T},u_2^{s,T})_{E_2}\}dt$.

et comme on a (Théorème 4.1) : $\beta_{s,T} = G_2u_2^{s,T} + Eh$, où :

$G_2 \in \mathcal{L}(L^2(s,T;E_2);L^2(s,T;V))$ et $E \in \mathcal{L}(H;L^2(s,T;V))$, on a :

$$(P_T(s)h,h) \leq \int_s^T \{\|CG_2u_2^{s,T}\|_F^2 \quad (N_2u_2^{s,T},u_2^{s,T})_{E_2}\}dt + 2\int_s^T (CEh,CG_2u_2^{s,T})_F dt +$$

$$+ \int_s^T \|CEh\|_F^2 dt \ .$$

$$\leq \int_s^T \{\|CG_2u_2^{s,T}\|_F^2 - (N_2u_2^{s,T},u_2^{s,T})_{E_2}\}dt + \frac{1}{\alpha_0}\int_s^T \|CG_2u_2^{s,T}\|_F^2 dt +$$

$$+ (\alpha_0+1)\int_s^T \|CEh\|_F^2 dt$$ (en utilisant le fait que : $2\,ab \leq \frac{1}{\alpha_0}\,a^2 + \alpha_0 b^2$, où α_0 est un réel strictement positif arbitrairement choisi).

Posons alors : $|||CG_2|||_{0,\infty} = \|CG_2\|_{\mathcal{L}(L^2(0,\infty;E_2);L^2(0,\infty;F))}$ et

$|||CE|||_{0,\infty} = \|CE\|_{\mathcal{L}(H;L^2(0,\infty;F))}$.

Vérifions que $|||CE|||_{0,\infty}$ est indépendant de T. Si l'on pose : $y_h = Eh$, y_h est solution de : $\frac{dy}{dt}h + Ay_h = 0$, $y_h(0) = h$. Et donc, multipliant par y_h et intégrant de 0 à l'∞, on a :

$$\alpha\,\|y_h\|^2_{L^2(0,\infty;V)} \leq \frac{1}{2}|h|^2 \text{ , soit : } \|E\|^2_{\mathcal{L}(H;L^2(0,\infty;V))} \leq \frac{1}{2\alpha} \text{ , et donc :}$$

$$|||CE|||_{0,\infty} \leq \frac{\|C\|_{\mathcal{L}(V;F)}}{2\alpha} \ .$$

On a donc :

$$(P_T(s)h,h) \leq (|||CG_2|||^2_{0,\infty}(1+\frac{1}{\alpha_0}) - \nu_2)\int_0^\infty \|\tilde{u}_2^{s,T}\|^2_{E_2}dt + (\alpha_0+1)|||CE|||^2_{0,\infty}|h|^2 \ .$$

Soit alors $\alpha_0 > \dfrac{|||CG_2|||^2_{0,\infty}}{\nu_2 - |||CG_2|||^2_{0,\infty}} > 0$.

Il vient : $(1+\frac{1}{\alpha_0})|||CG_2|||^2_{0,\infty} \leq \nu_2$ et donc :

$(P_T(s)h,h) \leq (\alpha_0+1)|||CE|||^2_{0,\infty}|h|^2 = c|h|^2$, c étant indépendante de T et s,

et donc : $\|P_T(s)\|_{\mathcal{L}(H;H)} \leq c$.

Alors, d'après le lemme 5.1, la famille $\{P_T(s) | T \geq s\}$, d'opérateurs linéaires, positifs ou nuls, auto-adjoints de $\mathcal{L}(H;H)$, est, pour $s < \infty$ fixé, croissante et uniformément bornée. On sait alors (Riesz-Nagy [21]) qu'il existe un opérateur linéaire positif auto-adjoint de $\mathcal{L}(H;H)$ tel que :

$$P(s) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ s<T}} P_T(s) \text{ pour la topologie forte des opérateurs.}$$

Reste à montrer que $P(s)$ est indépendant de s.

On a: $(P_T(s)h,h) = J^h_{s,T}(u_1^{s,T}, u_2^{s,T}) = J^h_{o,T-s}(u_1^{o,T-s}, u_2^{o,T-s}) = (P_{T-s}(0)h,h)$.

Soient alors $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$ et $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ tels que: $T_1 - s_1 = T_2 - s_2 > 0$.

On vérifie aisément que:

$$(P_{T_1}(s_1)h,h) = (P_{T_1-s_1}(0)h,h) = (P_{T_2-s_2}(0)h,h) = (P_{T_2}(s_2)h,h) .$$

Soient alors $s_1 \geq 0$ et $s_2 \geq 0$ fixés et $T_2 = T_1 \quad s_1 + s_2$. Alors :

$$P(s_1)h = \lim_{T_1\to\infty} P_{T_1}(s_1)h = \lim_{T_1\to\infty} P_{T_1-s_1+s_2}(s_2)h = \lim_{T_2\to\infty} P_{T_2}(s_2)h = P(s_2)h \quad ,$$

$\forall$ h ε H. Donc: $\lim_{T\to\infty} P_T(t)h = P(0)h \overset{\text{def}}{=} Ph$, $\forall$ $t \geq 0$, ce qui achève la démonstration.

On étudie maintenant la convergence des stratégies optimales, de l'état et de l'état adjoint lorsque $T \to \infty$.

<u>*THEOREME 5.1.*</u>:

(5.7) $\quad \tilde{y}_T \to y_\infty$, $\tilde{p}_T \to p_\infty$ *dans* $L^2(0,\infty;V)$ *fort* .

(5.8) $\quad \tilde{u}_1^T \to u_1^\infty$, $\tilde{u}_2^T \to u_2^\infty$ *dans* $L^2(0,\infty;E_1)$ *et* $L^2(0,\infty;E_2)$ *forts*.

<u>Démonstration</u>: D'après le lemme 5.1, on a:

$$\nu_1 \| \tilde{u}_1^T \|^2_{L^2(0,\infty;E_1)} \leq J^h_{o,T}(u_1^T,0) \leq J^h_{o,T}(u_1^T,u_2^T) \leq J^h_{o,\infty}(u_1,u_2) < +\infty .$$

On peut donc trouver une constante c indépendante de T telle que :

(5.9) $\quad \|\tilde{u}_1^T\|_{L^2(0,\infty;E_1)} \leq c$

D'autre part, si l'on pose comme habituellement :

$$\begin{cases} a_1^T(v_1,v_1) = \int_0^T \{\|CG_1v_1\|_F^2 + (N_1v_1,v_1)_{E_1}\}dt \\ a_2^T(v_2,v_2) = \int_0^T \{(N_2v_2,v_2)_{E_2} \quad \|CG_2v_2\|_F^2\}dt \\ b^T(v_1,v_2) = \int_0^T (CG_1v_1,CG_2v_2)_F dt = b^{*T}(v_2,v_1) \\ L_1^T(v_1) = \int_0^T (C\tilde{g},CG_1v_1)_F dt \\ L_2^T(v_2) = \int_0^T (C\tilde{g},CG_2v_2)_F dt \\ y_T(v_1,v_2) = G_1v_1 + G_2v_2 + \tilde{g}\ , \end{cases}$$

on a (Lemaire [12]) :

$$a_2^T(u_2^T,v_2) \quad b^{*T}(u_1^T,v_2) \quad L_2^T(v_2) = 0 \quad \forall\ v_2 \in L^2(0,T;E_2)\ .$$

En particulier, pour $v_2 = u_2^T$, il vient :

$$\begin{aligned}(\nu_2 \quad \||CG_2\||_{0,\infty}^2)\|\tilde{u}_2^T\|^2_{L^2(0,\infty;E_2)} &\leq a_2^T(u_2^T,u_2^T) = b^T(u_1^T,u_2^T) + L_2^T(u_2^T) \\ &\leq (c_1\|\tilde{u}_1^T\|_{L^2(0,\infty;E_1)} + c_2)\|\tilde{u}_2^T\|_{L^2(0,\infty;E_2)}\end{aligned}$$

où c_1 et c_2 ne dépendent pas de T.

Donc, compte tenu de (5.9), on a :

(5.10) $\quad \|\tilde{u}_2^T\|_{L^2(0,\infty;E_2)} \leq$ constante indépendante de T

L'état est alors donné par:

$$\frac{dy_T}{dt} + Ay_T = B_1u_1^T + B_1u_2^T + f\ , \qquad y_T(0) = y_0$$

En multipliant scalairement par y_T et en intégrant de 0 à T, omettant des manipulations usuelles, on obtient:

$$|y_T(T)|^2 + \alpha \int_0^\infty \|\tilde{y}_T\|^2\, dt \leq |y_0|^2 + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \|B_1\tilde{u}_1^T + B_2\tilde{u}_2^T + f\|_V^2, dt \leq c\ ,$$

d'après (5.9) et (5.10) .

Soit :

$$(5.11) \qquad |y_T(T)| \leq c \ , \ \|\tilde{y}_T\|_{L^2(0,\infty;V)} \leq c \ .$$

De même, l'état adjoint est donné par :

$$\frac{dp_T}{dt} + A^* p_T = D_2 y_T + g \ , \quad p_T(T) = 0 \ .$$

Et, par la même méthode que précédemment, on obtient :

$$(5.12) \qquad \|\tilde{p}_T\|_{L^2(0,\infty;V)} \leq c$$

et comme $\dfrac{d\tilde{p}_T}{dt} = \widetilde{\left(\dfrac{dp_T}{dt}\right)}$ on a :

$$(5.13) \qquad \left\|\frac{d\tilde{p}_T}{dt}\right\|_{L^2(0,\infty;V')} \leq c \ .$$

On peut donc trouver une suite T_n telle que $T_n \to \infty$ quand $n \to \infty$ et telle que :

$$(5.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\tilde{y}_{T_n}, \tilde{p}_{T_n}) \to (z,q) \text{ dans } (L^2(0,\infty;V))^2 \text{ faible} \\[2ex] \dfrac{d\tilde{p}_{T_n}}{dt} \to \dfrac{dq}{dt} \text{ dans } L^2(0,\infty;V') \text{ faible} \\[2ex] \tilde{u}_k^{T_n} \to w_k = N_k^{-1} i_{E_k}^{-1} B_k^* q \text{ dans } L^2(0,\infty;E_k) \text{ faible} \ , \ k = 1,2. \end{array} \right.$$

On peut alors passer à la limite dans :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\tilde{y}_{T_n}}{dt} + A\tilde{y}_{T_n} + D_1 \tilde{p}_{T_n} = y_{T_n}(T_n)\delta(t-T_n) + f \\[2ex] \dfrac{d\tilde{p}_{T_n}}{dt} + A^* \tilde{p}_{T_n} \quad D_2 \tilde{y}_{T_n} = g \\[2ex] \tilde{y}_{T_n}(0) = y_o \ , \ \tilde{p}_{T_n}(T_n) = 0 \end{array} \right.$$

pour obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dz}{dt} + Az + D_1 q = f \ , \quad z(0) = y_o \\[2ex] \dfrac{dq}{dt} + A^* q \quad D_2 z = g \ , \quad z,q \in L^2(0,\infty;V) \end{array} \right.$$

et donc : $z = y_\infty$ et $q = p_\infty$.

Donc : $\tilde{y}_T \rightarrow y_\infty$, $\tilde{p}_T \rightarrow p_\infty$ dans $L^2(0,\infty;V)$ faible lorsque $T\rightarrow\infty$,

et $(\tilde{u}_1^T, \tilde{u}_2^T) \rightarrow (u_1^\infty, u_2^\infty)$ dans $L^2(0,\infty;E_1) \times L^2(0,\infty;E_2)$ faible .

Montrons maintenant les convergences fortes .

On remarque, avec les notations précédentes, que :

$$a_1(\tilde{u}_1^T, u_1-\tilde{u}_1^T) = a_1^T(u_1^T, u_1-u_1^T) \quad \text{où} \quad a_1(v,w) \overset{\text{def}}{=} a_1^\infty(v,w)$$

$$b(\tilde{u}_2^T, u_1-\tilde{u}_1^T) = b^T(u_2^T, u_1-u_1^T) \quad \text{où} \quad b(v,w) \overset{\text{def}}{=} b^\infty(v,w)$$

$$a_2(\tilde{u}_2^T, u_2-\tilde{u}_2^T) = a_2^T(u_2^T, u_2-u_2^T) \quad \text{où} \quad a_2(v,w) \overset{\text{def}}{=} a_2^\infty(v,w) \; .$$

Montrons par exemple la première égalité :

$$(CG_1\tilde{u}_1^T, CG_1(u_1-\tilde{u}_1^T))_F + (N_1\tilde{u}_1^T, u_1-\tilde{u}_1^T)_{E_1} = \begin{cases} (CG_1u_1^T, CG_1(u_1-u_1^T))_F + (N_1u_1^T, u_1-u_1^T)_{E_1} & \text{si } t \leq T \\ 0 \text{ si } t > T \; . \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} a_1(\tilde{u}_1^T, u_1-\tilde{u}_1^T) &= \int_0^\infty \{(CG_1\tilde{u}_1^T, CG_1(u_1-\tilde{u}_1^T))_F + (N_1\tilde{u}_1^T, u_1-\tilde{u}_1^T)_{E_1}\}dt \\ &= \int_0^T \{(CG_1u_1^T, CG_1(u_1-u_1^T))_F + (N_1u_1^T, u_1-u_1^T)_{E_1}\}dt \\ &= a_1^T(u_1^T, u_1-u_1^T) \; . \end{aligned}$$

Or :

$$a_1(u_1-\tilde{u}_1^T, u_1-\tilde{u}_1^T) = a_1(u_1, u_1-\tilde{u}_1^T) \quad a_1^T(u_1^T, u_1-u_1^T)$$

et comme : $a_1(u_1, u_1-\tilde{u}_1^T) = L_1(u_1-\tilde{u}_1^T) - b(u_2, u_1-\tilde{u}_1^T)$

$$a_1^T(u_1^T, u_1-u_1^T) = L_1^T(u_1-u_1^T) - b^T(u_2^T, u_1-u_1^T)$$

on a :

$$a_1(u_1-\tilde{u}_1^T, u_1-\tilde{u}_1^T) = L_1(u_1-\tilde{u}_1^T) - L_1^T(u_1-u_1^T) - b(u_2-\tilde{u}_2^T, u_1-\tilde{u}_1^T)$$

de même :

$$a_2(u_2-\tilde{u}_2^T, u_2-\tilde{u}_2^T) = L_2(u_2-\tilde{u}_2^T) \quad L_2^T(u_2-u_2^T) + b^*(u_1-\tilde{u}_1^T, u_2-\tilde{u}_2^T) \; ,$$

Donc :

$$a_1(u_1-\tilde{u}_1^T, u_1-\tilde{u}_1^T) + a_2(u_2-\tilde{u}_2^T, u_2-\tilde{u}_2^T) = \int_T^\infty (C\tilde{g}-z_d, C(G_2u_2-G_1u_1))dt$$

et par continuité de l'intégrale, lorsque $T\rightarrow\infty$, on a :

$$\lim_{T\to\infty} \{a_1(u_1-\tilde{u}_1^T, u_1-\tilde{u}_1^T) + a_2(u_2-\tilde{u}_2^T, u_2-\tilde{u}_2^T)\} = 0 .$$

et comme $a_1(v,v) \geq \nu_1 \|v\|^2_{E_1}$ et $a_2(v,v) \geq (\nu_2 - \mathcal{G}^2_{2,\infty})\|v\|^2_{E_2}$

on a : $\tilde{u}_1^T \to u_1$ dans $L^2(0,\infty;E_1)$ fort

$\tilde{u}_2^T \to u_2$ dans $L^2(0,\infty;E_2)$ fort ;

et comme : $\|\tilde{y}_T - y\|_{L^2(0,\infty;V)} = \|G_1(u_1-\tilde{u}_1^T) + G_2(u_2-\tilde{u}_2^T)\|_{L^2(0,\infty;V)}$

il vient : $\tilde{y}_T \rightarrow y$ dans $L^2(0,\infty;V)$ fort

Finalement comme : $\frac{d}{dt}(\tilde{p}_T - p) + A^*(\tilde{p}_T - p) = D_2(\tilde{y}_T - y)$, on a:

$|p_T(0)-p(0)|^2 + \alpha\|\tilde{p}_T - p\|^2_{L^2(0,\infty;V)} \leq \frac{c}{\alpha}\|\tilde{y}_T - y\|^2_{L^2(0,\infty;V)}$, ce qui prouve que : $\tilde{p}_T \to p$ dans $L^2(0,\infty;V)$ fort, et le théorème est démontré

On termine par le résultat attendu :

<u>*THEOREME 5.2.*</u>*: Sous les hypothèses (4.1) à (4.6) et si :*
(H1) $\nu_1 > 0$ *et* $\nu_2 > \mathcal{G}^2_{2,\infty}$ *a lieu, alors:*

1) il existe un opérateur P *solution dans* $\mathcal{L}(H;H)$ *de l'équation de Riccati stationnaire :*

$$(5.15) \quad \begin{cases} (PA + A^*P + PD_1P)h = D_2h & \forall h \in V \\ P^* = P , \; P \geq 0 \end{cases}$$

et une fonction $r \in W(0,\infty)$, *donnée de manière unique par :*

$$(5.16) \quad \begin{cases} \frac{dr}{dt} + A^*r + PD_1r = Pf + g , & t > 0 \\ r \in W(0,\infty) \end{cases}$$

2) le point-selle en boucle ouverte de J *en horizon infini, noté* (u_1^*, u_2^*) *est donné par :*

$$(5.17) \quad \begin{cases} u_1^*(t) = N_1^{-1} i_{E_1}^{1} B_1^*(Py(t) + r(t)) \\ u_2^*(t) = N_2^{-1} i_{E_2}^{1} B_2^*(Py(t) + r(t)) \end{cases} \quad \text{p.p.} t \in [0,\infty)$$

où y *est l'unique solution de :*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay + D_1Py = f \quad D_1r , & t > 0 \\ y(0) = y_0 , \; y \in L^2(0,\infty;V) \end{cases}$$

3) *le couple de stratégies défini par :*

$$(5.18)\quad \begin{cases} \hat{u}_1(t,y) = N_1^{-1} i_{E_1}^{-1} B_1^*(Py + r(t)) \\ \hat{u}_2(t,y) = N_2^{-1} i_{E_2}^{-1} B_2^*(Py + r(t)) \end{cases}$$

est un point-selle en boucle fermée dans $L^2(0,\infty;E_1) \times L^2(0,\infty;E_2)$ *de* J .

Démonstration : on sait, grâce au Lemme 5.2 , que : $P = \lim_{T\to\infty} P_T(s)$

pour la topologie forte des opérateurs de $\mathcal{L}(H;H)$, $\forall s < \infty$.

D'autre part, grâce au théorème 5.1, on sait que le système :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay + D_1 p = 0 \\ -\frac{dp}{dt} + A^* p \quad D_2 y = 0 \\ y(0) = h \ , \ y,p \in L^2(0,\infty;V) \end{cases}$$

a une solution unique . Alors, comme $p(t) = Py(t)$, $\forall t \geq 0$,

y est solution de :

$$\frac{dy}{dt} + (A + D_1 P)y = 0 \quad , \quad y(0) = h \ , \ y \in L^2(0,\infty;V)$$

On est donc assuré de l'existence d'un semi-groupe $\{\Lambda_P(t) \mid t \in R_+\}$ fortement continu engendré par $A + D_1 P$ et :

$$(5.19)\quad y(t) = \Lambda_P(t)h$$

Supposons un instant démontrée l'identité :

$$(5.20)\quad (Ph,\bar{h}) = \int_0^\infty \{(D_2 y,y) + (D_1 p,p)\}dt$$

En reportant (5.19) dans (5.20) , on obtient :

$$(Ph,\bar{h}) = \int_0^\infty \{(D_2\Lambda_P(t)h,\Lambda_P(t)\bar{h}) + (PD_1P\Lambda_P(t)h,\Lambda_P(t)\bar{h})\}dt$$

et en appliquant la proposition 4.3 (iii) de Bensoussan-Delfour Mitter [4], on a que P est solution de :

$$(A^*P + PA + PD_1P)h = D_2 h \ , \quad \forall h \in V \ .$$

Et comme on a vu au Lemme 5.2, que $P \in \mathcal{L}(H;H)$, $P^* = P$, $P \geq 0$, on a (5.15)

Montrons donc (5.20) .

$\forall\ T \geq 0$, on a : $(P_T(0)h,\bar{h}) = \int_0^T \{(D_2 y_T, y_T) + (D_1 p_T, p_T)\}dt$

Mais comme $y_T \to y$, $\bar{y}_T \to \bar{y}$, $\bar{p}_T \to \bar{p}$, $p_T \to p$ dans $L^2(0,\infty;V)$ fort on peut passer à la limite lorsque $T \to \infty$ Le terme de droite tend vers : $\int_0^\infty \{(D_2 y, y) + (D_1 p, p)\} dt$ et celui de gauche vers $(Ph, \bar{h})$, et on a (5.20) .

Pour terminer la démonstration du point 1), il faut montrer l'existence de r

On a $\forall\, T \geq 0$, $p_T(t) = P_T(t) y_T(t) + r_T(t)$, donc :

$$\| \tilde{r}_T \|_{L^2(0,\infty;H)} \leq \| \tilde{p}_T \|_{L^2(0,\infty;H)} + \| P_T(t) \|_{\mathcal{L}(H;H)} \| \tilde{y}_T \|_{L^2(0,\infty;H)}$$

$\leq$ constante indépendante de T, compte tenu du théorème 5.1 et du lemme 5.2 On peut donc extraire une suite T_n telle que : $T_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ et $\tilde{r}_{T_n} \to \rho$ lorsque $n \to \infty$, dans $L^2(0,\infty;H)$ faible.

Alors ρ satisfait : $\rho(t) = Py(t) \quad p(t)$. Donc :

$\frac{d\rho}{dt} = P \frac{dy}{dt} \quad \frac{dp}{dt} \in L^2(0,\infty;V')$ et comme :

$\frac{dy}{dt} = \quad Ay \quad D_1 Py + f \quad D_1 \rho$, $\quad \frac{dp}{dt} = \quad A^* Py + D_2 y + g \quad A^* \rho$, on a :

$\frac{d\rho}{dt} = (A^* P + PA + PD_1 P \quad D_2) y + A^* \rho + PD_1 \rho \quad Pf \quad g$,

et comme P est solution de (5.15), on a :

$$\frac{d\rho}{dt} + A^* \rho + PD_1 \rho = Pf + g \ .$$

Comme, d'autre part, ρ est donné par (lemme 2.3) :

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} + A\eta + D_1 \xi = f \ , & \eta(0) = 0 \\ -\frac{d\xi}{dt} + A^* \xi \quad D_2 \eta = g \ , & \eta, \xi \in W(0,\infty) \ , \end{cases}$$

$\rho(s) = \xi(s) \quad \forall\, s \geq 0$, on a que $\rho \in W(0,\infty)$, ce qui prouve (5.16) .

Le point 2) découle du fait que $u_1^* = \quad N_1^{-1} i_{E_1}^{1} B_1^* p$, $u_2^* = N_2^{-1} i_{E_2}^{1} B_2^* p$

Le point 3) vient du théorème III.1 de Bensoussan [2]

5.3 Résultats dans des espaces L^2_{loc} en l'absence de croissance

On peut en fait se passer d'utiliser le Lemme 5.1 et adapter les théorèmes 5.1 et 5.2 pour des fonctionnelles d'un type plus général :

On suppose que l'état (y_1, y_2) est donné par :

$$(5.21)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} + A_1 y_1 = f_1 + B_1^1 v_1 + B_2^1 v_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} + A_2 y_2 = f_2 + B_1^2 v_1 + B_2^2 v_2 \\ y_1(0) = y_1^o \ , \ y_2(0) = y_2^o \end{cases}$$

avec $\begin{cases} f_k \in L^2(0,\infty;H) \ , \ y_k^o \in H \ , \ k = 1,2 \\ B_i^k \in \mathcal{L}(E_i;H) \ , \ i = 1,2 \ , \ k = 1,2 \\ (A_k z, z) \geq \alpha_k \| z \|^2 \quad \forall z \in V \ , \ k = 1,2 \end{cases}$

On posera pour la suite : $\alpha = \text{Min}\,(\alpha_1, \alpha_2)$

La fonctionnelle considérée est maintenant :

$$(5.22)\quad J(v_1,v_2) = \int_0^\infty \{ \| C_1 y_1(v_1,v_2) \|^2_{F_1} \quad \| C_2 y_2(v_1,v_2) \|^2_{F_2} + \\ + (N_1 v_1, v_1)_{E_1} \quad (N_2 v_2, v_2)_{E_2} \} dt$$

où $\begin{cases} F_k \text{ : Hilbert réel séparable} \ , \ k = 1,2. \\ C_k \in \mathcal{L}(H;F_k) \ , \ k = 1,2 \\ N_k \text{ est défini comme en (4.5)}, \ k = 1,2 \end{cases}$

On pourrait prendre, sans rien changer d'essentiel à ce qui suit, la fonctionnelle :

$$J(v_1,v_2) = \int_0^\infty \{ \| C_1 y_1 - z_{d_1} \|^2_{F_1} \quad \| C_2 y_2 - z_{d_2} \|^2_{F_2} + (N_1 v_1, v_1)_{E_1} - (N_2 v_2, v_2)_{E_2} \} dt$$

avec $z_{d_k} \in L^2(0,\infty;F_k)$, $k = 1,2$. Mais, pour simplifier les calculs déjà très lourds, on ne traitera ici que le cas $z_{d_k} = 0$, $k = 1,2$.

Le terme $\int_0^T \{ \| C_1 y_1 \|^2_{F_1} \quad \| C_2 y_2 \|^2_{F_2} \} dt$ n'étant plus croissant en fonction de T , on ne peut plus conclure sur la croissance de la valeur (si elle existe) du jeu

On montre d'abord que le jeu sur $[0,T]$ a une solution en boucle ouverte, puis on montre la convergence des P_T lorsque $T \to \infty$ pour arriver à l'analogue du théorème 5.2.

Avant d'énoncer le résultat qui suit, on introduit les constantes :

$$(5.23)\quad \begin{cases} \mathcal{G}_1^2 = \dfrac{1}{\alpha_2^2} \| C_2 \|^2_{\mathcal{L}(V;F_2)} \| B_1^2 \|^2_{\mathcal{L}(E_1;V')} \\ \mathcal{G}_2^2 = \dfrac{1}{\alpha_1^2} \| C_1 \|^2_{\mathcal{L}(V;F_1)} \| B_2^1 \|^2_{\mathcal{L}(E_2;V')} \end{cases} .$$

THEOREME 5.3.: Si l'hypothèse :

$(H1)'$ $\quad \nu_1 > \mathcal{G}_1^2 \quad , \quad \nu_2 > \mathcal{G}_2^2$

a lieu, alors pour tout $T > 0$ *(éventuellement* $+\infty$*) il existe un unique point-selle en boucle ouverte de* $J_T(v_1, v_2)$ *caractérisé par:*

$$(5.24)\quad \begin{cases} a_1^T(u_1^T, v_1) + b^T(u_2^T, v_1) + L_1^T(v_1) = 0 & \forall v_1 \in L^2(0,T;E_1) \\ a_2^T(u_2^T, v_2) - b^{*T}(u_1^T, v_2) + L_2^T(v_2) = 0 & \forall v_2 \in L^2(0,T;E_2) \\ (u_1^T, u_2^T) \in L^2(0,T;E_1) \times L^2(0,T;E_2) . \end{cases}$$

avec :

$$(5.25)\quad \begin{cases} a_1^T(v_1, w_1) = \int_0^T \{ (C_1 G_1^1 v_1, C_1 G_1^1 w_1) - (C_2 G_1^2 v_1, C_2 G_1^2 w_1) + \\ \qquad\qquad + (N_1 v_1, w_1) \} dt \\ a_2^T(v_2, w_2) = \int_0^T \{ (N_2 v_2, w_2) - (C_1 G_2^1 v_2, C_1 G_2^1 w_2) + \\ \qquad\qquad + (C_2 G_2^2 v_2, C_2 G_2^2 w_2) \} dt \\ b^T(v_2, v_1) = \int_0^T \{ (C_1 G_2^1 v_2, C_1 G_1^1 v_1) \quad (C_2 G_2^2 v_2, C_2 G_1^2 v_1) \} dt \\ \qquad \overset{\text{def}}{=} b^{*T}(v_1, v_2) \\ L_1^T(v_1) = \int_0^T \{ (C_1 G_1^1 v_1, C_1 \tilde{g}_1) \quad (C_2 G_1^2 v_1, C_2 \tilde{g}_2) \} dt \\ L_2^T(v_2) = \int_0^T \{ (C_2 G_2^2 v_2, C_2 \tilde{g}_2) \quad (C_1 G_2^1 v_2, C_1 \tilde{g}_1) \} dt \\ y_1 = G_1^1 v_1 + G_2^1 v_2 + \tilde{g}_1 \ , \ y_2 = G_1^2 v_1 + G_2^2 v_2 + \tilde{g}_2 . \end{cases}$$

<u>Remarque 5.2</u> : L'hypothèse (H1)' assure la stricte convexe concavité de J_T. Comme le terme $\int_0^T \{ \| C_1 y_1 \|^2_{F_1} \quad \| C_2 y_2 \|^2_{F_2} \} dt$

n'est pas positif, l'hypothèse sur ν_1 est évidemment plus restrictive que dans le cas croissant (§5.2), alors que ν_2 reste inchangé. Enfin, si $C_2 \equiv 0$, on retrouve bien l'hypothèse (H1).

<u>Démonstration</u> : Il est clair que l'on a l'existence d'opérateurs linéaires continus G_i^k de $\mathcal{L}(L^2(0,\infty;E_i);L^2(0,\infty;V))$, $i = 1,2$, $k = 1,2$ et de fonctions $\tilde{g}_i$ de $L^2(0,\infty;V)$, $i = 1,2$ donnés par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(G_i^k v_i) + A_k(G_i^k v_i) = B_i^k v_i & i = 1,2 \quad , \quad k = 1,2 \\ G_i^k v_i(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{g}_i}{dt} + A_i \tilde{g}_i = f_i & \\ \tilde{g}_i(0) = y_i^\circ & \end{cases} \qquad i = 1,2$$

tels que :

$$y_k = G_1^k v_1 + G_2^k v_2 + \tilde{g}_k \qquad k = 1,2 \tag{5.26}$$

En reportant (5.26) dans (5.22) et en dérivant par rapport à u_1^T et u_2^T au sens de Gâteaux :

$$(J_T'(u_1^T,u_2^T),(v_1,u_2^T)) = \int_0^T \{ (C_1 G_1^1 u_1^T, C_1 G_1^1 v_1) \quad (C_2 G_1^2 u_1^T, C_2 G_1^2 v_1) +$$
$$+ (N_1 u_1^T, v_1) + (C_1 G_2^1 u_2^T, C_1 G_1^1 v_1) - (C_2 G_2^2 u_2^T, C_2 G_1^2 v_1) + (C_1 G_1^1 v_1, C_1 \tilde{g}_1)$$
$$(C_2 G_1^2 v_1, C_2 \tilde{g}_2) \} dt \; .$$

$$(J_T'(u_1^T,u_2^T),(u_1^T,v_2)) = \int_0^T \{ (N_2 u_2^T, v_2) \quad (C_1 G_2^1 u_2^T, C_1 G_2^1 v_2) +$$
$$+ (C_2 G_2^2 u_2^T, C_2 G_2^2 v_2) + (C_2 G_2^2 v_2, C_2 G_1^2 u_1^T) \quad (C_1 G_2^1 v_2, C_1 G_1^1 u_1^T) +$$
$$+ (C_2 G_2^2 v_2, C_2 \tilde{g}_2) \quad (C_1 G_2^1 v_2, C_1 \tilde{g}_1) \} dt \; .$$

Donc une condition suffisante pour que (u_1^T,u_2^T) soit un point-selle s'écrit :

$$\begin{cases} (J_T'(u_1^T,u_2^T),(v_1,u_2^T)) = 0 & \forall\ v_1 \ \varepsilon\ L^2(0,T;E_1) \\ (J_T'(u_1^T,u_2^T),(u_1^T,v_2)) = 0 & \forall\ v_2 \ \varepsilon\ L^2(0,T;E_2) \end{cases}$$

sous des conditions à vérifier. Supposons que ces conditions soient réalisées, alors on obtient (5.24) avec les notations(5.25). Il faut donc vérifier que la fonctionnelle J_T est convexe-concave s.c.i. en v_1 et s.c.s. en v_2 et que :

$$\lim_{\|v_1\|\to\infty} J_T(v_1,v_2) = +\infty\ \forall\ v_2\ ,\ \lim_{\|v_2\|\to\infty} J_T(v_1,v_2) = -\infty\ \forall\ v_1\ .$$

En fait (Lemaire [12]), il suffit de vérifier que :

$$\begin{cases} a_1^T(v_1,v_1) \geq \delta_1\ \|v_1\|^2_{L^2(0,T;E_1)} & ,\ \delta_1 > 0 \quad \forall\ v_1\ \varepsilon\ L^2(0,T;E_1) \\ a_2^T(v_2,v_2) \geq \delta_2\ \|v_2\|^2_{L^2(0,T;E_2)} & ,\ \delta_2 > 0 \quad \forall\ v_2\ \varepsilon\ L^2(0,T;E_2). \end{cases}$$

On a donc :

$$a_1^T(v_1,v_1) = \int_0^T \{\|C_1G_1^1v_1\|_F^2 \quad \|C_2G_1^2v_1\|_F^2 + (N_1v_1,v_1)_{E_1}\}dt$$

$$\geq \nu_1\|v_1\|^2_{L^2(0,T;E_1)} \qquad \|C_2G_1^2v_1\|^2_{L^2(0,T;F)}$$

Soit alors $y_2^1 = G_1^2v_1$. Il vérifie :

$$\frac{dy_2^1}{dt} + A_2y_2^1 = B_1^2v_1 \quad , \quad y_2^1(0) = 0.$$

Donc :

$$\frac{1}{2}|y_2^1(T)|^2 + \alpha_2 \int_0^T \|y_2^1\|_V^2 dt \leq \int_0^T \|B_1^2v_1\|_{V'} \|y_2^1\|_V dt$$

ou encore : $\alpha_2 \int_0^T \|y_2^1\|^2 dt \leq \frac{1}{\alpha_2} \int_0^T \|B_1^2v_1\|_{V'}^2 dt$

Donc :

$$\| C_2 G_1^2 v_1 \|^2_{L^2(0,T;F_1)} \leq \frac{1}{\alpha_2^2} \| C_2 \|^2_{\mathcal{L}(V;F_2)} \quad \| B_1^2 \|^2_{\mathcal{L}(E_1;V')} \| v_1 \|^2_{L^2(0,T;E_1)}$$

donc si $\nu_1 > \mathfrak{G}_1^2$ on aura :

$$(\nu_1 - \mathfrak{G}_1^2) \| v_1 \|^2 \leq \nu_1 \| v_1 \|^2 \quad \| C_2 G_1^2 v_1 \|^2$$

$$\text{et} \quad a_1^T (v_1, v_1) \geq (\nu_1 - \mathfrak{G}_1^2) \| v_1 \|^2 .$$

De même :

$$a_2^T (v_2, v_2) = \int_0^T \{ (N_2 v_2, v_2)_{E_2} \quad \| C_1 G_2^1 v_2 \|^2_{F_1} + \| C_2 G_2^2 v_2 \|^2_{F_2} \} dt$$

$$\geq \nu_2 \| v_2 \|^2_{L^2(0,T;E_2)} \quad \| C_1 G_2^1 v_2 \|^2_{L^2(0,T;F_1)}$$

et par un raisonnement analogue au précédent, on trouve que :

$$\| C_1 G_2^1 v_2 \|^2_{L^2(0,T;F_1)} \leq \frac{1}{\alpha_1^2} \| C_1 \|^2_{\mathcal{L}(V;F_1)} . \| B_2^1 \|^2_{\mathcal{L}(E_2;V')^2} \| v_2 \|^2_{L^2(0,T;E_2)}$$

donc si $\nu_2 > \mathfrak{G}_2^2$ on a :

$$a_2^T (v_2, v_2) \geq (\nu_2 - \mathfrak{G}_2^2) \| v_2 \|^2 .$$ D'où le théorème.

On introduit maintenant l'état adjoint (p_1, p_2) :

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} + A_1^* p_1 = C_1^* C_1 y_1 \\[2ex] \dfrac{dp_2}{dt} + A_2^* p_2 = C_2^* C_2 y_2 \\[2ex] p_1(T) = p_2(T) = 0 \ , \ p_1, p_2 \in L^2(0,T;V) \end{cases}$$

Par un calcul classique, on vérifie que (5.24) donne :

$$\begin{cases} \int_0^T (i_{E_1}{}^{1} B_1^{1*} p_1 + i_{E_1}{}^{1} B_1^{2*} p_2 + N_1 u_1^T , v_1) dt = 0 \quad \forall \ v_1 \in L^2(0,T;E_1) \\[2ex] \int_0^T (-i_{E_2}{}^{1} B_2^{2*} p_2 - i_{E_2}{}^{1} B_2^{1*} p_1 + N_2 U_2^T , v_2) dt = 0 \quad \forall \ v_2 \in L^2(0,T;E_2) \end{cases}$$

Soit :

$$(5.27)\quad \begin{cases} u_1^T = N_1^{-1} i_{E_1}^{1} \left(B_1^{1*} p_1 + B_1^{2*} p_2\right) \\ u_2^T = N_2^{-1} i_{E_2}^{-1} \left(B_2^{1*} p_1 + B_2^{2*} p_2\right) \end{cases}$$

En remplaçant (u_1^T, u_2^T) par sa valeur dans (5.21) on obtient donc, en posant $y_k = y_k(u_1^T, u_2^T)$, $k = 1,2$:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}1 + A_1 y_1 = f_1 \quad (B_1^1 N_1^{-1} i_{E_1}^{-1} B_1^{1*} \quad B_2^1 N_2^{-1} i_{E_2}^{-1} B_2^{1*}) p_1 \; - \\ \qquad\qquad (B_1^1 N_1^{-1} i_{E_1}^{1} B_1^{2*} - B_2^1 N_2^{-1} i_{E_2}^{1} B_2^{2*}) p_2 \, , \\ \frac{dy}{dt}2 + A_2 y_2 = f_2 \quad (B_1^2 N_1^{-1} i_{E_1}^{1} B_1^{1*} - B_2^2 N_2^{-1} i_{E_2}^{-1} B_2^{1*}) p_1 \\ \qquad\qquad (B_1^2 N_1^{-1} i_{E_1}^{-1} B_1^{2*} \quad B_2^2 N_2^{-1} i_{E_2}^{1} B_2^{2*}) p_2 \, . \\ y_1(0) = y_1^{\circ} \quad , \quad y_2(0) = y_2^{\circ} \\ -\frac{dp}{dt}1 + A_1^* p_1 = C_1^* C_1 y_1 \qquad p_1(T) = 0 \\ -\frac{dp}{dt}2 + A_2^* p_2 = \quad C_2^* C_2 y_2 \qquad p_2(T) = 0 \, . \end{cases}$$

Posons : $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, $y(0) = \begin{pmatrix} y_1^{\circ} \\ y_2^{\circ} \end{pmatrix} = y_o$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad , \quad D_2 = \begin{pmatrix} C_1^* C_1 & 0 \\ 0 & C_2^* C_2 \end{pmatrix} = D_2^* \; ,$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} B_1^1 N_1^{-1} i_{E_1}^{-1} B_1^{1*} & B_2^1 N_2^{-1} i_{E_2}^{-1} B_2^{1*} & B_1^1 N_1^{-1} i_{E_1}^{-1} B_1^{2*} & B_2^1 N_2^{-1} i_{E_2}^{1} B_2^{2*} \\ B_1^2 N_1^{-1} i_{E_1}^{1} B_1^{1*} & B_2^2 N_2^{-1} i_{E_2}^{-1} B_1^{2*} & B_1^2 N_1^{-1} i_{E_1}^{-1} B_1^{2*} & - \; B_2^2 N_2^{-1} i_{E_2}^{1} B_2^{2*} \end{pmatrix} = D_1^*$$

alors y et p vérifient :

$$(5.28)\quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay + D_1 p = f \\ \quad \frac{dp}{dt} + A^* p \quad D_2 y = 0 \end{cases} \quad t \in \left]0,T\right[$$

$$\quad y(0) = y_o \quad , \quad p(T) = 0 \quad , \quad y,p \in L^2(0,T;V \times V)$$

On a donc le :

<u>THEOREME 5.4.</u>: *Sous les hypothèses* (5.21), (5.22) *et si* :

(H1)' : $\nu_1 > \mathcal{G}_1^2$, $\nu_2 > \mathcal{G}_2^2$. *Alors* :

1) *Le système* (5.28) *a une unique solution* $\{y_T, p_T\}, \forall T \in]0,\infty[$.

2) *Il existe un opérateur* $P_T(t) \in \mathcal{L}(H\times H; H\times H)$, $P_T^*(t) = P_T(t)$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall T \in]0,\infty[$, *et vérifiant* :

(5.29) $\gamma_T(t) = P_T(t)\beta_T(t)$ *où* $\{\beta_T, \gamma_T\}$ *est la solution de* (5.28) *pour* $f = 0$, *et* :

$P_T(t)$ *est solution de l'équation de Riccati* (1.20).

3) *Le point-selle en boucle ouverte* (u_1^T, u_2^T) *sur* $[0,T]$ *de* J *est donné par* :

$$(5.30)\begin{cases} u_1^T(t) = N_1^{-1}B_1^*(P_T(t)y_T(t)+r(t)), \\ u_2^T(t) = N_2^{-1}B_2^*(P_T(t)y_T(t) + r(t)). \end{cases} \quad \text{p.p. } t \in [0,T]$$

avec :

$$B_k^* \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} i_{E_1}^{-1}B_k^{1*} & 0 \\ 0 & i_{E_2}^{-1}B_k^{2*} \end{pmatrix} , \quad k = 1,2 .$$

où r_T *est solution de* :

$$(5.31)\quad \begin{cases} \dfrac{dr_T}{dt} + A^*r_T + P_T(.)D_1r_T = P_T(.)f \\ r(T) = 0 , \; r_T \in L^2(0,T;V\times V) \; (\textit{et } \dfrac{dr_T}{dt} \in L^2(0,T;V'\times V')). \end{cases}$$

et où y_T *est solution de* :

$$(5.32)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_T}{dt} + Ay_T + D_1P_T(.)y_T = f \quad D_1r_T \\ y_T(0) = y_o \quad , \quad y_T \in L^2(0,T;V\times V) . \end{cases}$$

4) *Le couple de stratégies définies par* :

$$(5.33)\quad \begin{cases} \hat{u}_1^T(t,y) = N_1^{-1}B_1^*(P_T(t)y + r_T(t)) \\ \hat{u}_2^T(t,y) = N_2^{-1}B_2^*(P_T(t)y + r_T(t)) \end{cases}$$

est un point-selle en boucle fermée dans $L^2(0,T;E_1)\times L^2(0,T;E_2)$ *de* J.

<u>Démonstration</u> : C'est une adaptation des résultats antérieurs.

On étudie maintenant la convergence lorsque $T\to\infty$.

LEMME 5.3.: *$\forall$ T > 0 et $\forall$ s $\leq$ T , on peut trouver une constante* c *indépendante de* T *et de* s *telle que :*

$$\| P_T(s) \|_{\mathcal{L}(H\times H;H\times H)} \leq c$$

Démonstration : On procède comme au lemme 5.2 en remarquant que :

$$(P_T(s)h,h) = \int_s^T \{(D_2\beta_{s,T},\beta_{s,T}) + (N_1 u_1^{s,T}, u_1^{s,T}) - (N_2 u_2^{s,T}, u_2^{s,T})\}dt.$$

Donc :

$$(5.34) \quad (P_T(s)h,h) \leq \int_s^T \{(D_2\beta_{s,T}(0,u_2^{s,T}),\beta_{s,T}(0,u_2^{s,T})) \\ (N_2 u_2^{s,T}, u_2^{s,T})\}dt$$

où $\beta_{s,T}$ est la solution de :

$$\begin{cases} \beta_{s,T} = \begin{pmatrix} \beta^1_{s,T} \\ \beta^2_{s,T} \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt}\beta^1_{s,T} + A_1\beta^1_{s,T} = B_1^1 u_1^{s,T} + B_2^1 u_2^{s,T} \\ \frac{d}{dt}\beta^2_{s,T} + A_2\beta^2_{s,T} = B_1^2 u_1^{s,T} + B_2^2 u_2^{s,T} \\ \beta_{s,T}(s) = h \ ,\beta_{s,T} \in L^2(s,T;V\times V). \end{cases}$$

et $\beta_{s,T}(0,u_2^{s,T})$ s'obtient en faisant $u_1^{s,T} = 0$ dans le système précédent. Posons $\bar\beta_{s,T} = \beta_{s,T}(0,u_2^{s,T})$. On a donc :

$$\begin{aligned} \bar\beta^1_{s,T} &= G_2^1 u_2^{s,T} + E_1 h_1 \\ \bar\beta^2_{s,T} &= G_2^2 u_2^{s,T} + E_2 h_2 \end{aligned} \qquad \text{où } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

alors dans (5.34), par un calcul similaire à celui du lemme 5.2, on trouve :

$$(P_T(s)h,h) \leq \int_s^T \{(\mathcal{G}_2^2 - \nu_2) \| u_2^{s,T} \|^2_{E_2} + \frac{1}{\alpha_0}\mathcal{G}_2^2 \| u_2^{s,T} \|^2_{E_2} + \\ +(\alpha_0+1)\| C_1E_1h_1 \|^2_{F_1} \}dt \ .$$

et en prenant ($\alpha_0 > 0$ étant arbitrairement choisi) :

$$\alpha_0 > \frac{\mathcal{G}_2^2}{\nu_2 - \mathcal{G}_2^2} > 0 \ , \text{ on trouve :}$$

$(P_T(s)h,h) \leq c(\alpha_0+1)|h|^2$ d'où le lemme.

THEOREME 5.5.: Sous les hypothèses (5.21), (5.22) et (H1)', il existe un opérateur $P \in \mathcal{L}(H\times H; H\times H)$ *indépendant du temps, vérifiant :*

$$P^* = P \ , \ Ph = \lim_{T\to\infty} P_T(s)h \ \textit{dans } H\times H \textit{ faible pour tout } h\in H\times H$$

et tout $s < +\infty$

De plus, on a :

$$\begin{cases} \tilde{y}_T \to y_\infty \ , \ \tilde{p}_T \to p_\infty \ \textit{dans } L^2_{loc}(0,\infty;V\times V) \\ (\tilde{u}_1^T, \tilde{u}_2^T) \to (u_1^\infty, u_2^\infty) \ \textit{dans } L^2_{loc}(0,\infty;E_1) \times L^2_{loc}(0,\infty;E_2) \ . \end{cases}$$

Démonstration : y_T vérifie (pour $f = 0$) :

$$(5.35) \quad \begin{cases} \frac{dy_T}{dt} + Ay_T = -D_1P_T(.)y_T \ , \quad t \in \left]0,T\right[\\ y_T(0) = y_0 \end{cases}$$

Soit alors $t_0 \in \left]0,T\right[$. En multipliant scalairement par y_T et intégrant de 0 à t_0 (on note $V\times V = V^2$) :

$$|y_T(t_0)|^2 + \alpha \int_0^{t_0} \| y_T\|^2_{V^2} dt \leq |h|^2 + c \int_0^{t_0} |y_T(t)|^2 dt$$

grâce au lemme 5.3.(On continue à noter $|.|$ la norme de $H\times H$).
Donc, avec l'inégalité de Gronwall :

$$(5.36) \quad \begin{cases} \| y_T\|_{L^2(0,t_0;V^2)} \leq c(t_0) \text{ indépendante de } T \\ |y_T(t_0)| \leq c(t_0) \ . \end{cases}$$

De plus, utilisant (5.28), on a :

$$\frac{dp_T}{dt} + A^*p_T - D_2y_T = 0 \quad , \quad p_T(T) = 0 \quad , \text{ et donc :}$$

$$|p_T(0)|^2 + \alpha \int_0^{t_0} \| p_T\|^2_{V^2} dt \leq |p_T(t_0)|^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^{t_0} \| D_2\|^2 \| y_T\|^2_{V^2} dt$$

et comme $|p_T(t_0)| = |P_T(t_0)y_T(t_0)| \leq c(t_0)$ d'après (5.36), on a :

$$\| p_T \|_{L^2(0,t_o;V^2)} \leq c(t_o) \text{ indépendante de } T.$$

Finalement : $\qquad \| \frac{dp_T}{dt} \|_{L^2(0,t_o;V'^2)} \leq c(t_o)$.

On peut alors refaire les mêmes estimations pour $t_o \geq T$ à condition de prolonger y_T et p_T par 0 en dehors de $[0,T]$:

$$\| \tilde{y}_T \|_{L^2(0,t_o;V^2)} \leq c(t_o) \ , \ \| \tilde{p}_T \|_{L^2(0,t_o:V^2)} \leq c(t_o)$$

$$\| \frac{d\tilde{p}_T}{dt} \|_{L^2(0,t_o;V'^2)} \leq c(t_o) \ .$$

On peut donc trouver une suite $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $T_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ et telle que $\forall\ t_o > 0$:

$$\begin{cases} \tilde{y}_{T_n} \to z \ , \ \tilde{p}_{T_n} \to q \text{ dans } L^2(0,t_o;V^2) \text{ faible} \\ \dfrac{d\tilde{p}_{T_n}}{dt} \to \dfrac{dq}{dt} \text{ dans } L^2(0,t_o;V'^2) \text{ faible} \\ \tilde{u}_1^{T_n} = N_1^{-1} B_1^* \tilde{p}_{T_n} \to w_1 = N_1^{-1} B_1^* q \text{ dans } L^2(0,t_o;E_1) \text{ faible} \\ \tilde{u}_2^{T_n} = N_2^{-1} B_2^* \tilde{p}_{T_n} \to w_2 = N_2^{-1} B_2^* q \text{ dans } L^2(0,t_o;E_2) \text{ faible} \ . \end{cases}$$

Et en passant à la limite dans :

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{y}_{T_n}}{dt} + A\tilde{y}_{T_n} + D_1 \tilde{p}_{T_n} = \delta(t-T_n) y_{T_n}(T_n) \quad , \ t \in \left]0,t_o\right[\\ \dfrac{d\tilde{p}_{T_n}}{dt} + A^* \tilde{p}_{T_n} \quad D_2 \tilde{y}_{T_n} = 0 \\ y_{T_n}(0) = h \ , \ p_{T_n}(T_n) = 0 \ , \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} + Az + D_1 q = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t \in \left]0,t_o\right[\\ \dfrac{dq}{dt} + A^* q \quad D_2 z = 0 \\ z(0) = h \end{cases}$$

Donc, $\forall\, t_o > 0$: $z = y_\infty \overset{\text{def}}{=} y_\infty|_{[0,t_o]}$, $q = p_\infty \overset{\text{def}}{=} p_\infty|_{[0,t_o]}$.

La convergence forte se montre exactement comme au théorème 5.1 ,à condition de remplacer l'intervalle $]0,\infty[$ par $[0,t_o]$.

Donc :

$$\tilde{y}_T \to y \quad , \quad \tilde{p}_T \to p \text{ dans } L^2_{loc}(0,\infty;V^2)$$

$$(\tilde{u}_1^T,\tilde{u}_2^T) \to (u_1,u_2) \text{ dans } L^2_{loc}(0,\infty;E_1) \times L^2_{loc}(0,\infty;E_2) \ ,$$

où l'on a posé : $y_\infty = y$, $p_\infty = p$, $u_1^\infty = u_1$, $u_2^\infty = u_2$.

Reste à montrer la convergence des $P_T(t)$.

Comme on a : $P_T(s) = P_{T-s}(0) \quad \forall\, s < T$, il suffit de passer à la limite pour $P_T(0)$. On a :

$$(P_T(0)h,\bar{h}) = \int_0^T \{(D_2y_T(t),y_T(t))+(D_1P_T(t)y_T(t),P_T(t)y_T(t))\}dt$$

où $y_T(t)$ est l'état engendré par (u_1^T,u_2^T) et $\bar{h}$.

Posons :

$$g_T(t) = \begin{cases} (D_2y_T(t),y_T(t))+(D_1P_T(t)y_T(t),P_T(t)y_T(t)) \text{ si } 0 \le t \le T \\ 0 \text{ si } t > T \ . \end{cases}$$

D'après ce qui précède, on a : $\tilde{y}_T \to y$ dans $W_{loc}(0,\infty)$ où :

$$W_{loc}(0,\infty) = \{\phi|\phi \in L^2_{loc}(0,\infty;V^2),\frac{d\phi}{dt} \in L^2_{loc}(0,\infty;V'^2)\} \ ,$$

et $\tilde{p}_T \to p$ dans $W_{loc}(0,\infty)$.

Or, comme $\forall\, t_o > 0$, on a :

$$W(0,t_o) = \{\phi|\phi\in L^2(0,t_o;V^2),\frac{d\phi}{dt}\in L^2(0,t_o;V'^2)\} \subset C^\circ([0,t_o];H\times H)$$

(Lions-Magenes [15]) , on a :

$\tilde{y}_T \to y$, $\tilde{p}_T \to p$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$.

Alors on voit facilement que $g_T(t) \to g(t)$ simplement lorsque $T\to\infty$, avec $g(t) = (D_2y(t),y(t)) + (D_1p(t),p(t))$.

D'autre part, comme on a : $(P_T(0)h,h) \le c|h|^2$, on peut trouver une suite $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (dépendant éventuellement de h) telle que $T_n \to \infty$ lorsque $n\to\infty$ et : $P_{T_n}(0)h \to q$ dans $H\times H$ faible.

Alors comme $\int_0^\infty g_{T_n}(t)dt = (P_{T_n}(0)h,h) \leq c|h|^2$, on a, par le lemme de fatou :

$$\int_0^\infty g(t)dt = \int_0^\infty (\lim_{n\to\infty} g_{T_n}(t))dt \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_0^\infty g_{T_n}(t)dt$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} (P_{T_n}(0)h,h) = (q,h) .$$

Montrons l'inégalité inverse :

Soit ξ_{T_n} l'état engendré par $u_1 = N_1^{-1}B_1^*p$ et $u_2^{T_n} = N_2^{-1}B_2^*p_{T_n}$, la condition initiale étant h

On voit facilement, d'après ce qui précède, que :

$$\xi_{T_n} \to y \text{ dans } W_{loc}(0,\infty) .$$

Et comme $(P_{T_n}(0)h,h) \leq J_{T_n}(u_1,u_2^{T_n})$, on a :

$$(q,h) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} J_{T_n}(u_1,u_2^{T_n}) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \int_0^{T_n}\{\| C\xi_{T_n}\|^2+(N_1u_1,u_1)$$

$$(N_2u_2^{T_n},u_2^{T_n})\}dt$$

$$=\int_0^\infty\{\| Cy\|^2 +(N_1u_1,u_1)-(N_2u_2,u_2)\}dt$$

$$=\int_0^\infty\{(D_2y(t),y(t))+(D_1p(t),p(t))\}dt$$

$$=\int_0^\infty g(t)dt$$

et donc : $(q,h) = \int_0^\infty g(t)dt$ Comme alors la limite ne dépend pas de la suite extraite, c'est toute la famille $\{P_T(0)h\}_{T>0}$ qui converge faiblement

Posons alors : $q = Ph$. On a :

$$p_T(t) \quad Py(t) = (p_T(t)-P_T(t)y_T(t)) + P_T(t)(y_T(t)-y(t))$$

$$+ (P_T(t)-P)y(t) .$$

et comme $p_T(t) = P_T(t)y_T(t)$ on a : $Py(t) = \lim_{T\to\infty} p_T(t)$ dans HxH faible, soit : $Py(t) = p(t)$. Donc :

$$(Ph,h) = \int_0^\infty\{(D_2y(t),y(t)) + (D_1Py(t),Py(t))\}dt$$

On a alors :

$$(Ph,\bar{h}) = \frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} \{(P_T(0)(h+\bar{h}),h+\bar{h}) \quad (P_T(0)h,h) - (P_T(0)\bar{h},\bar{h})\}$$

$$= (h,P\bar{h}) = \int_0^\infty \{(D_2 y(t),\bar{y}(t)) + (D_1 Py(t),P\bar{y}(t))\}dt, \forall h \in H\times H,$$

$\forall \bar{h} \in H\times H$, et donc P est complètement déterminé dans $\mathcal{L}(H\times H;H\times H)$.

De plus, les propriétés de P découlent de celles de $P_T(0)$ par passage à la limite. Donc : $P^* = P$.

Enfin P est indépendant du temps :

soit $s < \infty$ et posons $T' = T-s$.

$\lim_{T\to\infty} (P_T(s)h,\bar{h}) = \lim_{T'\to\infty} (P_{T'}(0)h,\bar{h}) = (Ph,\bar{h})$, $\forall h,\bar{h} \in H\times H$, d'où le théorème.

<u>*THEOREME 5.6.*</u>*: Sous les hypothèses précédentes,*

1) P *vérifie l'équation de Riccati stationnaire :*

$$\begin{cases} (A^*P+PA+PD_1P)h = D_2h \ , \quad \forall\ h \in V^2 \\ P \in \mathcal{L}(H\times H;H\times H),\ P^* = P \ , \end{cases}$$

et il existe une fonction r *définie par :*

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} + A^*r + PD_1r = Pf \\ r \in W(0,\infty) \ . \end{cases}$$

2) Le point-selle en boucle ouverte (u_1^*,u_2^*) *de* J *en horizon infini, est donné par :*

$$u_1^*(.) = N_1^{-1}B_1^*(Py(.)+r(.)),\ u_2^*(.) = N_2^{-1}B_2^*(Py(.)+r(.)) \ ,$$

où y *est la solution dans* $L^2(0,\infty;V^2)$ *de :*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + (A+D_1P)y = f \quad D_1r \\ y(0) = y_0 \ . \end{cases}$$

3) Le couple de stratégies défini par :

$$\hat{u}_1(t,y) = -N_1^{-1}B_1^*(Py+r(t)) \ , \ \hat{u}_2(t,y) = N_2^{-1}B_2^*(Py+r(t))$$

est un point-selle en boucle fermée dans $L^2(0,\infty;E_1)\times L^2(0,\infty;E_2)$ *de* J .

Démonstration : Comme le système

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay + D_1 p = 0 \\ \frac{dp}{dt} + A^* p \quad D_2 y = 0 \\ y(0) = h \end{cases}$$

admet une solution unique dans $L^2(0,\infty;V^2)\times L^2(0,\infty;V^2)$ et que $p = Py$, on a : y défini par

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + (A + D_1 P)y = 0 \\ y(0) = h \end{cases}$$

est uniquement déterminé dans $L^2(0,\infty;V^2)$ et on est donc assuré de l'existence d'un semi-groupe fortement continu $\{ \Lambda_P(t) | \ t \in \mathbb{R}_+ \}$ engendré par $A+D_1P$ tel que :

$$y(t) = \Lambda_P(t)h \ .$$

Et comme : $(Ph,\bar{h}) = \int_0^\infty \{(D_2 y,y) + (D_1 p,p)\}dt$, on a :

$$(Ph,\bar{h}) = \int_0^\infty ((D_2 + PD_1 P)\Lambda_P(t)h,\Lambda_P(t)\bar{h})dt \ .$$

Donc, d'après la proposition 4.3 (iii) de Bensoussan-Delfour Mitter [4], on sait que P vérifie l équation de Riccati station naire : $(A^*P + PA + PD_1 P)h = D_2 h$, $\forall \ h \in V^2$.

Toute la suite de la démonstration se fait alors comme au théorème 5.2.

Remarque 5.3 : Tous les résultats de ce paragraphe *ont été obtenus* en grande partie grâce au fait que A est V^2-elliptique :

$$(Aw,w) \geq \alpha \| w \|^2_{V^2} \ , \ \forall \ w \in V^2 \ , \ \alpha > 0$$

C'est cette condition qui assure la L^2 stabilité du système (la solution est dans $L^2(0,\infty;V^2)$), et aussi :

$$+ \infty > \mathcal{G}_k^2 \geq \| \ C_k G_{3-k}^k \|^2 \ , \ k = 1,2$$

En effet, si A était λ coercif : $\exists \lambda \geq 0$ et $\alpha > 0$ tel que :

$$(Aw,w) + \lambda | w |^2 \geq \alpha \ \| w \|^2_{V^2} \ , \ \forall \ w \in V^2 \ ,$$ on aurait :

$$\| C_k G^k_{3-k} \|^2 \leq \tilde{\mathcal{G}}_k^2 = \frac{e^{2\lambda T}}{\alpha^2_{3-k}} \| C_k \|^2 \| B^k_{3-k} \|^2 \quad , \; k = 1,2 \; .$$

Donc, lorsque $T \to \infty$, $\tilde{\mathcal{G}}_k^2$ n'est pas borné et on devrait avoir $\nu_1 = \nu_2 = +\infty$ pour remplir la condition (H1)', ce qui est absurde

Cependant, comme $\tilde{\mathcal{G}}_k^2$, $k = 1,2$, n'est pas la meilleure constante assurant la convexe-concavité de J, on peut se demander si, dans le cas A : λ-coercif, on a des résultats analogues aux précédents Le problème est ouvert.

5.4. L'hypothèse (H2) : $D_1 \geq 0$, et la stabilisabilité

On se place dans le cadre du chapitre 4, la seule différence étant que l'on suppose que A est λ-coercif :

$$(5.37) \quad \begin{cases} \exists \lambda \geq 0 \text{ et } \alpha > 0 \text{ tels que :} \\ (Av,v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2 \quad , \quad \forall v \in V \; . \end{cases}$$

Notre but est ici d'établir avec l'hypothèse (H2) : $D_1 \geq 0$, des résultats analogues à ceux des théorèmes 5.2 et 5.6.

Avant d'exposer les résultats, nous donnerons quelques définitions qui nous seront utiles dans la suite de cette partie

On suppose que U et F sont des Hilberts réels et que A est générateur d'un semi-groupe fortement continu dans $\mathcal{L}(H;H)$.
Soient $B \in \mathcal{L}(U;H)$ et $C \in \mathcal{L}(H;F)$.

On considère alors un système contrôlé dans $L^2(0,\infty;U)$:

$$(5.38) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = Bv \\ y(0) = h \end{cases}$$

<u>Définition 5.1</u> : On dit que le semi-groupe engendré par A est <u>L^2-stable</u>, ou que A est L^2-stable, si et seulement si la solution de (5.38) pour $v = 0$ vérifie : $y \in L^2(0,\infty;V)$, $\forall h \in H$

Définition 5.2: On dit que le couple (C,A) est détectable si et seulement si $\exists K \in \mathcal{L}(F;H)$ tel que $A + KC$ soit L^2 stable

Définition 5.3: On dit que le couple (A,B) est stabilisable si et seulement si $\exists K \in \mathcal{L}(H;U)$ tel que $A + BK$ soit L^2 stable

Remarque 5.4: Pour des systèmes détectables, la définition 5.3 est équivalente à la définition de la stabilisabilité relativement à C introduite par Bensoussan-Delfour-Mitter [4] C'est ce que montre la :

PROPOSITION 5.1: Si le couple (C,A) est détectable, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) (A,B) est stabilisable.

(ii) $\forall h \in H$, $\exists v_0 \in L^2(0,\infty;U)$ tel que $\int_0^\infty \| Cy(v_0) \|_F^2 dt < +\infty$

où $y(v_0)$ est la solution de (5.38) pour $v = v_0$

Démonstration : Montrons: (i) implique (ii). Soit $K \in \mathcal{L}(H;U)$ tel que $A + BK$ est L^2 stable. Alors si $y(t)$ est la trajectoire donnée par :

$$\frac{dy}{dt} + (A + BK)y = 0 \quad , \quad y(0) = h \quad , \quad \text{on a :}$$

$y \in L^2(0,\infty;V)$ et $v_0(t) = Ky(t)$ vérifie : $v_0 \in L^2(0,\infty;U)$.

Et comme on a : $\frac{dy}{dt} + Ay = Bv_0$, $y(0) = h$, on a (ii).

Montrons : (ii) implique (i). Soit $v_0 \in L^2(0,\infty;U)$ tel que $Cy(v_0) \in L^2(0,\infty;F)$

Posons $J(v) = \int_0^\infty \{ \| Cy(v) \|_F^2 + \| v \|_U^2 \} dt$. On a alors :

$$0 \leq \min_{v \in L^2_{loc}(0,\infty;U)} J(v) \leq \int_0^\infty \{ \| Cy(v_0) \|_F^2 + \| v_0 \|_U^2 \} dt < +\infty .$$

Alors, appliquant les théorèmes 5.2 et 5.3 de Bensoussan-Delfour-Mitter [4] on a l'existence d'un opérateur $P \in \mathcal{L}(H;H)$ vérifiant :

$$(Py_o, y_o) = \underset{v \in L^2_{loc}(0,\infty;U)}{\mathrm{Min}} \int_0^\infty \{ \| Cy \|_F^2 + \| v \|_U^2 \} dt \text{ , et :}$$

$$P^* = P \ , \ P \geq 0$$

$$(A^*P + PA + PBB^*P)h = C^*Ch \quad , \quad \forall \ h \in V.$$

Posons alors : $K = B^*P$. L'équation de Riccati s'écrit alors :

$$(2P(A + BK) \quad K^*K \quad C^*C)h = 0 \ , \ \forall \ h \in V$$

Et d'après Zabczyk (Lemme 3) [25], comme (C,A) est détectable, on a : $A + BK$ est L^2-stable, d'où (i) .

<u>Remarque 5.5</u> : Si A est λ-coercif, le couple (I,A) est détectable En effet, en prenant $K = \lambda I$, on a : $A + \lambda I$ est L^2-stable par définition de la λ-coercivité.

Si A est V-elliptique, $\forall \ C \in \mathcal{L}(H;F)$, on a (C,A) est détectable : il suffit de prendre $K = C^*$. Alors, comme $C^*C \geq 0$, $A + C^*C$ est encore V-elliptique.

On est maintenant en mesure de présenter les résultats parallèles à ceux des § 5.2 et 5.3.

On considère donc l'état donné par :

$$(5.39) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = B_1v_1 + B_2v_2 \\ y(0) = y_o \end{cases}$$

et la fonction coût :

$$(5.40) \quad J(v_1,v_2) = \int_0^\infty \{(D_2y,y) + (N_1v_1,v_1)_{E_1} \quad (N_2v_2,v_2)_{E_2}\} dt$$

avec $D_2 = C^*C \quad C \in \mathcal{L}(H;F)$

On a alors, en posant comme précédemment $D_1 = B_1N_1^{\ 1}B_1^* \quad B_2N_2^{-1}B_2^*$:

<u>*THEOREME 5.7*</u> : *Sous les hypothèses (5.37),(5.39),(5.40) et si*

(H2) $\quad D_1 \geq 0$

(5.41) *le couple* (C,A) *est détectable*

(5.42) *le couple* $(A,D_1^{1/2})$ *est stabilisable*

on a les résultats suivants :

1) il existe $P \in \mathcal{L}(H;H)$ *unique solution de:*

$$P^* = P \ , \ P \geq 0$$

$$(A^*P + PA + PD_1P)h = D_2h \quad , \ \forall \ h \in H$$

2) le couple (u_1^*, u_2^*) *de stratégies définies par :*

$$u_1^*(y) = N_1^{-1}B_1^*Py \ , \ u_2^*(y) = N_2^{-1}B_2^*Py$$

est un point-selle en boucle fermée dans $L^2(0,\infty;E_1) \times L^2(0,\infty;E_2)$ *de* J

Démonstration : D'après (5.41) et (5.42) ,on peut appliquer le théorème 1 de Zabczyk [25] , au système :

$$\frac{dy}{dt} + Ay = D_1^{1/2}v \quad , \ y(0) = h$$

avec la fonctionnelle : $I(v) = \int_0^\infty \{ \| Cy \|_F^2 + |v|^2 \} dt$.

On a alors que l'équation de Riccati algébrique:

$$\begin{cases} (A^*P + PA + PD_1P)h = D_2h \ , \ \forall h \in H \\ P^* = P \ , \ P \geq 0 \end{cases}$$

admet une solution unique vérifiant de plus : $A + D_1P$ est L^2 stable . Il suffit alors d'appliquer le théorème III.1 de Bensoussan [2] pour avoir 2)

On se propose maintenant de trouver un résultat parallèle au théorème 5.6 sous la condition (H2) : $D_1 \geq 0$.

Malheureusement, comme dans ce cas D_2 n'a pas un signe défini,on ne peut se ramener à un problème classique de contrôle optimal .

On considère le système :

$$(5.43) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = \mathcal{B}v \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, A_1 et A_2 étant V-elliptiques de constantes respectives α_1 et α_2 On pose $\alpha_0 = \mathrm{Min}(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^2 \\ B_1^2 & B_2^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2 ; H \times H)$$

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est la solution de (5.43), $y \in L^2(0,\infty;V\times V)$

(on notera comme précédemment $V\times V = V^2$) .

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est supposé être choisi dans $L^2(0,\infty;E_1\times E_2)$ pour assurer à (5.43) une solution sur $[0,\infty[$.

$$y_0 = \begin{pmatrix} y_0^1 \\ y_0^2 \end{pmatrix} \in H\times H$$

On pose $C_i \in \mathcal{L}(H;F_i)$ où F_i est un Hilbert réel, i = 1,2

et :

(5.45) $D_2 = \begin{pmatrix} C_1^*C_1 & 0 \\ 0 & C_2^*C_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H\times H;H\times H)$ D_2 n'a pas de signe)

On pose aussi $\mathcal{N}^{-1} = \begin{pmatrix} N_1^{-1} & 0 \\ 0 & N_2^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1\times E_2;E_1\times E_2)$

et : $D_1 = \mathcal{B}\mathcal{N}^{-1}\mathcal{B}^* \in \mathcal{L}(H\times H;H\times H)$

On a :

(5.46) $D_1 = \begin{pmatrix} B_1^1N_1^{-1}B_1^{1*}-B_2^1N_2^{-1}B_2^{1*} & B_1^1N_1^{-1}B_1^{2*}-B_2^1N_2{}^1B_2^{2*} \\ B_1^2N_1^{-1}B_1^{1*}-B_2^2N_2^{-1}B_2^{1*} & B_1^2N_1^{-1}B_1^{2*}-B_2^2N_2{}^1B_2^{2*} \end{pmatrix}$

Finalement la fonction coût est donnée par :

(5.47) $J(v_1,v_2) = \int_0^\infty \{(D_2y,y) + (N_1v_1,v_1)_{E_1} \quad (N_2v_2,v_2)_{E_2}\}dt$

On a alors le résultat suivant, si D_1 et D_2 sont suffisamment "petits" :

THEOREME 5.8. : Sous les hypothèses (5.43) à (5.47) et si :

(*H2*) $\quad D_1 \geq 0$

Si de plus : $\alpha_0^2 > \| D_1 \|_{\mathcal{L}(H\times H;H\times H)} \| D_2 \|_{\mathcal{L}(H\times H;H\times H)}$

Alors :

1) $\exists P \in \mathcal{L}(H\times H;H\times H) \quad , \quad P^* = P$, tel que

$(A^*P + PA + PD_1P)h = D_2h \quad \forall\, h \in V^2$

2) *Le couple* (u_1^*, u_2^*) *de stratégies défini par :*

$$u_1^*(y) = N_1^{-1}B_1^*Py \quad , \quad u_2^*(y) = N_2^{-1}B_2^*Py$$

$$\text{où } B_k = \begin{pmatrix} i_{E_1}{}^1B_k^{1*} & 0 \\ 0 & i_{E_2}{}^1B_k^{2*} \end{pmatrix} \quad , \quad k = 1,2$$

est un point-selle en boucle fermée dans $L^2(0,\infty;E_1)\times L^2(0,\infty;E_2)$ *de* J .

Démonstration : On considère le système :

$$(5.48) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = D_1^{1/2}v \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

et la fonctionnelle :

$$I(v) = \int_0^\infty \{(D_2y,y) + |v|^2\}dt$$

comme $y = Gv + g$ où

$$(5.49) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(Gv) + A(Gv) = D_1^{1/2}v \\ (Gv)(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dg}{dt} + Ag = 0 \\ g(0) = y_0 \end{cases}$$

De (5.49), on tire, en multipliant scalairement par Gv et intégrant de 0 à l'∞ :

$$\| Gv \|^2_{L^2(0,\infty;V^2)} \leq \frac{1}{\alpha_0^2} \| D_1 \|_{\mathcal{L}(H\times H;H\times H)} \| v \|^2_{L^2(0,\infty;H\times H)}$$

donc :

$$\int_0^{\infty}(D_2Gv,Gv)dt \leq \frac{1}{\alpha_0^2}\|D_1\|_{\mathcal{L}(H\times H;H\times H)}\|D_2\|_{\mathcal{L}(H\times H;H\times H)}\|v\|^2_{L^2(0,\infty;H\times H)}$$

Or la fonctionnelle $I(v)$ s'écrit :

$$I(v) = \int_0^{\infty}\{|v|^2 + (D_2Gv,Gv) + 2(D_2Gv,g) + (D_2g,g)\}dt$$

donc, pour que I soit strictement convexe et ∞ à l'∞, il suffit que

$$\left(1 \quad \frac{1}{\alpha_0^2}\|D_1\| \ \|D_2\|\right)\|v\|^2_{L^2(0,\infty;H\times H)} > \beta\|v\|^2_{L^2(0,\infty;H\times H)}$$

où β peut être choisi arbitrairement avec $\beta > 0$.

Donc, il suffit que : $\alpha_0^2 > \|D_1\| \ \|D_2\|$.

Comme c'est ce qu'on a supposé, $I(v)$ atteint son minimum et celui-ci est unique dans $L^2(0,\infty;H\times H)$

Or le minimum u vérifie :

$(I'(u),v) = 0 \quad \forall v \in L^2(0,\infty;H\times H)$, soit, si l'on introduit l'état adjoint et après avoir fait un calcul classique d'intégration par parties :

$$\frac{dp}{dt} + A^*p = D_2y \quad , \quad p \in L^2(0,\infty;V^2)$$

$$(I'(u),v) = \int_0^{\infty}(D_1^{1/2}p + u,v)dt = 0 \quad \forall v \in L^2(0,\infty;H\times H)$$

et donc $u = D_1^{1/2}p$. Reportant u dans (5.48), on voit que le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay + D_1p = 0 \\ \dfrac{dp}{dt} + A^*p \quad D_2y = 0 \\ y(0) = y_0 \quad , \quad y,p \in L^2(0,\infty;V^2) \end{cases}$$

a une solution unique

Alors, en découplant, on obtient que :

$\exists P \in \mathcal{L}(H\times H; H\times H)$, $P^* = P$, vérifiant :

$(A^*P + PA + PD_1P)h = D_2h \quad \forall\ h \in V^2$

et le théorème est démontré en appliquant le théorème III.1 de Bensoussan [2] qui montre que (u_1^*, u_2^*) est un point-selle en boucle fermée dans $L^2(0,\infty;E_1) \times L^2(0,\infty;E_2)$ de J .

5.5. Exemples et illustrations pour le chapitre 5

Exemple 5.1 : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ régulière . Soient $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$.

On prend $E_1 = E_2 = H$ et $B_i \in \mathcal{L}(H;H)$, $i = 1,2$.

Considérons le système variationnel :

$$(5.50)\quad \begin{cases} (\frac{dy}{dt}, z) + a(y,z) = (B_1v_1 + B_2v_2\ ,\ z)\ , & \forall\ z \in V \\ y(0) = y_o \end{cases}$$

où $a(y,z) = \int_\Omega \nabla y.\nabla z\ dx \quad (= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_i}\ dx\ )$

et où $B_iv_i = b_i(x)v_i(t,x)$, $i = 1,2$, les fonctions b_i vérifiant : $b_i \in L^\infty(\Omega)$. On supposera par exemple $b_1 \neq 0$.

(5.50) équivaut à :

$$(5.51)\quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} \quad \Delta y = b_1v_1 + b_2v_2 & \text{dans } Q =]0,\infty[\times\Omega \\ \frac{\partial y}{\partial n}\Big|_\Sigma = 0\ ,\quad \Sigma =]0,\infty[\times\Gamma\ , & n \text{ étant la normale à } \Gamma \text{ orientée vers l'extérieur.} \\ y(0) = y_o \end{cases}$$

On est donc dans le cas : $a(y,y) + |y|^2 \geq \|y\|^2$, $\forall\ y \in V$.

Considérons la fonction coût :

$J(v_1,v_2) = \int_0^\infty \{|y|^2 + n_1|v_1|^2 - n_2|v_2|^2\}dt$.

Comme Δ n'est pas $H^1(\Omega)$-elliptique, on ne peut pas appliquer le théorème 5.2 .

Pour pouvoir appliquer le théorème 5.7, il faut vérifier d'abord que $(I,-\Delta)$ est détectable ; or $\Delta + I$ étant V-elliptique, on peut prendre $K = I$.

Comme $b_1 \neq 0$, on peut trouver un nombre $\beta_1^2 > 0$, tel que $(b_1(x))^2 \geq \beta_1^2$, $\forall\ x \in \Omega$. Supposons alors que :

$$(C) \qquad n_2 > \frac{\| b_2^2 \|_{L^\infty(\Omega)}}{\beta_1^2} \cdot n_1 \quad ;$$

on a donc $\forall\ v \in L^2(\Omega)$:

$$(D_1 v, v) = \frac{1}{n_1} \int_\Omega (b_1(x))^2 (v(x))^2 dx \quad \frac{1}{n_2} \int_\Omega (b_2(x))^2 (v(x))^2 dx$$

$$\geq \frac{\beta_1^2}{n_1} |v|^2 \quad \frac{\| b_2^2 \|_{L^\infty(\Omega)}}{n_2} \cdot |v|^2 \geq \gamma |v|^2$$

avec : $\gamma = \dfrac{\beta_1^2}{n_1} \quad \dfrac{\| b_2^2 \|_{L^\infty(\Omega)}}{n_2} > 0$.

Prenons alors $K = \frac{1}{\gamma} D_1^{1/2}$. On voit alors facilement que

$-\Delta + D_1^{1/2} K$ est V-elliptique et donc $(-\Delta, D_1^{1/2})$ est stabilisable.

Comme de plus D_1 est H-elliptique (et donc positif!), les hypothèses du théorème 5.7 sont remplies avec n_2 vérifiant la condition (C).

Donc il existe un ~~unique~~ point-selle en boucle fermée dans $(L^2(0,\infty;H))^2$ donné par :

$$u_1^*(y) = \frac{1}{n_1} b_1 P y \quad , \quad u_2^*(y) = \frac{1}{n_2} b_2 P y$$

Où P est l'unique solution dans $\mathcal{L}(H;H)$ de :

$$\begin{cases} P\Delta \quad \Delta P + P(\frac{1}{n_1} b_1^2 - \frac{1}{n_2} b_2^2) P = I \\ P^* = P \quad , \quad P \geq 0 \end{cases}$$

P est alors donné par son noyau $P(x,\xi)$ solution de l'équation intégro-différentielle stationnaire de Riccati :

$$P\phi = \int_\Omega P(x,\xi)\phi(\xi) d\xi \qquad , \ \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \ , \text{ et :}$$

$$\begin{cases} -(\Delta_\xi+\Delta_x)P(x,\xi)+\int_\Omega P(x,\zeta)(\frac{1}{n_1}b_1^2(\zeta)-\frac{1}{n_2}b_2^2(\zeta))P(\zeta,\xi)d\zeta = \delta(x-\xi) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dans} \quad \Omega_x X \Omega_\xi \\ P(x,\xi) = P(\xi,x) \quad , \quad \forall\ x \in \Omega,\ \forall\ \xi \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n}P(x,\xi) = 0 \quad \text{si } x \in \Gamma,\ \xi \in \Omega \text{ ou si } x \in \Omega,\ \xi \in \Gamma \quad . \end{cases}$$

<u>Exemple 5.2</u> :On reprend le même exemple avec $V = H_o^1(\Omega)$. Alors (5.50) équivaut à :

$$(5.52) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} \quad \Delta y = b_1 v_1 + b_2 v_2 \text{ dans } Q = \Omega \times \left]0,\infty\right[\\ y|_\Sigma = 0 \qquad (\Sigma = \Gamma \times \left]0,\infty\right[) \\ y(0) = y_o \end{cases}$$

et Λ est V-elliptique.

La fonction coût est toujours donnée par :

$$J(v_1,v_2) = \int_0^\infty\{|y|^2 + n_1|v_1|^2 \quad n_2|v_2|^2\}dt$$

Dans ce cas, si $n_1 > 0$ et $n_2 > \|b_2^2\|_{L^\infty(\Omega)}$, d'après le théorème 5.2, le couple défini par :

$$u_1^*(y) = \frac{1}{n_1}b_1 Py \quad , \quad u_2^*(y) = \frac{1}{n_2}b_2 Py$$

est un point-selle en boucle fermée dans $(L^2(0,\infty;H))^2$ de J avec P solution de :

$$\begin{cases} P\Delta \quad \Delta P + P(\frac{1}{n_1}b_1^2 \quad \frac{1}{n_2}b_2^2)P = I \\ P^* = P \quad , \quad P \geq 0 \end{cases}$$

P est donné par son noyau $P(x,\xi)$:

$$\begin{cases} (\Delta_x+\Delta_\xi)P(x,\xi)+\int_\Omega P(x,\zeta)(\frac{1}{n_1}b_1^2(\zeta)-\frac{1}{n_2}b_2^2(\zeta))P(\zeta,\xi)d\zeta = \delta(x-\xi) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dans} \quad \Omega_x \times \Omega_\xi \\ P(x,\xi) = P(\xi,x) \quad , \quad \forall\ x \in \Omega,\ \forall\ \xi \in \Omega \\ P(x,\xi) = 0 \text{ si } x \in \Gamma,\ \xi \in \Omega \text{ ou si } x \in \Omega,\ \xi \in \Gamma. \end{cases}$$

On note (Remarque 5.5) que comme Δ est V-elliptique, on a $(I,-\Delta)$ détectable et $(-\Delta, D_1)$ stabilisable; donc si $D_1 \geq 0$ on retrouve le même résultat, avec en plus le fait que P solution de (5.53) est unique.

<u>Exemple 5.3</u> : Soient $V = H_o^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ (Ω comme à l'exemple 5.2

Prenons :

$$A_1\phi = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^1 \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + a_o^1 \phi$$

$$A_2\phi = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + a_o^2 \phi$$

$$k=1,2 \begin{cases} \text{où } a_{ij}^k \in L^\infty(\Omega), \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha_k|\xi|^2 \quad (\alpha_k>0)\forall\ \xi \in R^n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{et p.p } x \in \Omega. \\ a_o^k(x) \geq \alpha_k \quad \text{p.p} \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

Soient b_1^1, b_1^2, b_2^1, b_2^2 quatre nombres réels.

On considère alors le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} + A_1 y_1 = b_1^1 v_1 + b_2^1 v_2 \quad , \quad y_1(0) = y_o^1 \ , \ y_{1|\Sigma} = 0 \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dt} + A_2 y_2 = b_1^2 v_1 + b_2^2 v_2 \quad , \quad y_2(0) = y_o^2 \ , \ y_{2|\Sigma} = 0 \end{cases}$$

et la fonction coût :

$$J(v_1,v_2) = \int_0^\infty \{|y_1|^2 \quad |y_2|^2 + n_1|v_1|^2 \quad n_2|v_2|^2\}dt$$

Alors si $n_1 > \frac{1}{\alpha_2^2}(b_1^2)^2$ et $n_2 > \frac{1}{\alpha_1^2}(b_2^1)^2$

on sait, grâce au théorème 5.6 que :

$$u_1^*(y) = \frac{1}{n_1}\begin{pmatrix} b_1^1 & 0 \\ 0 & b_1^2 \end{pmatrix} Py \ , \ u_2^*(y) = \frac{1}{n_2}\begin{pmatrix} b_2^1 & 0 \\ 0 & b_2^2 \end{pmatrix} Py$$

où $P = \begin{pmatrix} P_1 & Q \\ Q^* & P_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H\times H; H\times H)$, $P^* = P$, et en posant :

$$d_1^1 = \frac{(b_1^1)^2}{n_1} \quad \frac{(b_2^1)^2}{n_2} \; , \; d_1^2 = \frac{b_1^2 b_1^1}{n_1} - \frac{b_2^2 b_2^1}{n_2} \; , \; d_2^2 = \frac{(b_1^2)^2}{n_1} \quad \frac{(b_2^2)^2}{n_2} \; ,$$

P vérifie :

$$\begin{cases} A_1^* P_1 + P_1 A_1 + d_1^1 P_1^2 + d_1^2 (P_1 Q^* + Q P_1) + d_2^2 Q Q^* = I \\ \\ A_1^* Q + Q A_2 + d_1^2 Q^2 + d_2^2 Q P_2 + d_1^1 P_1 Q + d_1^2 P_1 P_2 = 0 \\ \\ A_2^* P_2 + P_2 A_2 + d_2^2 P_2^2 + d_1^2 (P_2 Q + Q^* P_2) + d_1^1 Q^* Q = -I \end{cases}$$

et P est donné par son noyau :

$$\begin{pmatrix} P_1(x,\xi) & Q(x,\xi) \\ Q^*(x,\xi) & P_2(x,\xi) \end{pmatrix}$$

On omet l'équation intégro-différentielle de Riccati pour sa présentation trop encombrante.

Finalement, on aura le même résultat si :

$\begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 \\ d_1^2 & d_2^2 \end{pmatrix} \geq 0$ et $\mathrm{Min}(\alpha_1,\alpha_2) > \{d_1^2 + \mathrm{Max}(d_1^1, d_1^2)\}^{1/2}$, d'après le théorème 5.8 .

Remarque 5.6: On peut se demander si la théorie développée ici englobe les jeux différentiels avec contrôles frontière. En fait, ce type de problème correspond au cas où $B_i \notin \mathcal{L}(E_i;H)$:

Soient $V = H^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$. L'état est donné par la résolution du problème de Neumann :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = 0 \text{ dans } Q = \Omega \times \left]0,T\right[\\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A}\Big|_\Sigma = b_1 v_1 + b_2 v_2 \text{ où } \Sigma = \Gamma \times \left]0,T\right[\\ \\ y(0) = y_o \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

avec : $b_i \in \mathcal{L}(L^2(\Sigma);L^2(\Sigma))$, $i = 1,2$

$$(A\phi,\psi) = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + a_o \phi\psi \Big) dx$$

$a_{ij} \in \overset{\infty}{L}(\Omega)$, $a_o \in L^{\infty}(\Omega)$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$, p.p. $x \in \Omega$

$a_o(x) \geq \alpha > 0$ p.p. $x \in \Omega$.

Soit la fonction coût :

$J(v_1,v_2) = \int_0^T \{ \|Cy\|_F^2 + \int_\Gamma (n_1 v_1^2 \quad n_2 v_2^2) d\Gamma \} dt$ où $C \in \mathcal{L}(H;F)$,

$n_1 > 0$ et $n_2 > \frac{1}{\alpha^2} \|C\|^2 \|B_1\|^2$, où l'on a défini B_1 et B_2 par

$(B_i v_i, \psi) = \int_\Gamma b_i v_i \psi d\Gamma \quad \forall\ \psi \in H^1(\Omega)$, $i = 1,2$.

Donc : $B_i \in \mathcal{L}(E_i;V')$, $i = 1,2$ et $B_i \notin \mathcal{L}(E_i;H)$.

On sait que le système :

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} + A\phi = 0 \text{ dans } Q_s =]s,T[\times \Omega \\ -\frac{d\psi}{dt} + A^*\psi = D_2\phi \text{ dans } Q_s \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu_A}\Big|\Sigma_s + d_1\psi|\Sigma_s = 0 \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial\nu_{A^*}}\Big|\Sigma_s = 0 \quad , \quad \Sigma_s = \Gamma \times]s,T[\\ \phi(s) = h \quad , \quad \psi(T) = 0 \qquad\qquad d_1 = \frac{1}{n_1} b_1 b_1^* \quad \frac{1}{n_2} b_2 b_2^* . \end{cases}$$

a une solution unique $\{\phi,\psi\} \in W(s,T) \times W(s,T)$, $\forall\ s \in [0,T[$.
Mais on ne peut cependant pas appliquer les majorations a priori du chapitre 2 pour prouver que l'on peut découpler. Ceci est dû essentiellement au fait que :

$$\|\Psi\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|\Psi\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{mais pas en général :}$$

$$\|\Psi\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\ |\psi|_{L^2(\Omega)} \quad \text{(voir par exemple Nečas [19])}$$

et on ne peut pas avoir une majoration du type (2.8). D'autres techniques semblent donc être nécessaires pour traiter ce problème.

6. L'équation d'Isaacs-Bellman stationnaire

On va donner l'équivalent des théorèmes 5.2, 5.6, 5.7 et 5.8 pour l'existence d'une solution à l'équation d'Isaacs-Bellman stationnaire :

On considère le système :

$$(6.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = B_1 v_1 + B_2 v_2 \\[2ex] y(0) = y_0 \end{cases}$$

et la fonction coût :

$$(6.2)\qquad J(v_1,v_2) = \int_0^{\infty} \{ \| Cy \|_F^2 + (N_1 v_1, v_1)_{E_1} \quad (N_2 v_2, v_2)_{E_2} \} dt$$

B_i, C et N_i , $i = 1,2$, ayant les propriétés habituelles (4.2) et (4.5)

On a :

THEOREME 6.1 : Si A *est* λ*-coercif, si* $(H2)$: $D_1 \geq 0$ *et si :* (C,A) *est détectable,* $(A, D_1^{1/2})$ *est stabilisable; alors il existe une fonction* $V \in C^1(H;R_+)$ *vérifiant l'équation d'Isaacs-Bellman stationnaire :*

$$(6.3)\qquad \underset{e_1 \in E_1}{\mathrm{Min}}\ \underset{e_2 \in E_2}{\mathrm{Max}}\ I(h, \frac{dV}{dh}, e_1, e_2) = \underset{e_2 \in E_2}{\mathrm{Max}}\ \underset{e_1 \in E_1}{\mathrm{Min}}\ I(h, \frac{dV}{dh}, e_1, e_2) = 0 \qquad \forall\ h \in V$$

avec :

$$(6.4)\qquad I(h,p,e_1,e_2) = (p, B_1 e_1 + B_2 e_2 \quad Ah) + \frac{1}{2}\{ \| Ch \|_F^2 + (N_1 e_1, e_1)_{E_1} \quad (N_2 e_2, e_2)_{E_2} \}.$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit d'écrire que $V(h) = \frac{1}{2}(Ph,h)$ où P existe grâce au théorème 5.6, et d'appliquer la même méthode qu'au théorème 3.1.

<u>*THEOREME 6.2*</u> : *Si A est V-elliptique et sous l'une quelconque des hypothèses suivantes* : (H2) $D_1 \geq 0$

(H1) $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > \sigma_2^2$

on a la conclusion du théorème 6.1.

Si maintenant on se place dans le cadre des § 5.3 et 5.4 (Théorème 5.8), l'état étant donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = Bv \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

A et B étant définis comme (5.43), (5.44) et la fonction coût :

$$J(v_1,v_2) = \int_0^\infty \{(D_2 y,y) + (N_1 v_1,v_1)_{E_1} \quad (N_2 v_2,v_2)_{E_2}\}dt$$

D_1 et D_2 étant définis par (5.45), (5.46), on a :

<u>*THEOREME 6.3*</u> : *Si A est V^2-elliptique et sous l'une quelconque des hypothèses suivantes* :

. (H1)' $\nu_1 > \sigma_1^2$, $\nu_2 > \sigma_2^2$

(H2) $D_1 \geq 0$, *et* $\alpha_0^2 > \|D_2\| \; \|D_1\|$

Alors il existe une fonction $V \in C^1(H\times H;\mathbb{R})$ *vérifiant* (6.3) $\forall\, h \in V^2$, *avec* :

$$I(h,p,e_1,e_2) = (p,Be-Ah) + \frac{1}{2}\{(D_2 h,h) + (N_1 e_1,e_1)_{E_1} \quad (N_2 e_2,e_2)_{E_2}\},$$

$$e = \binom{e_1}{e_2} \in E_1 \times E_2 .$$

IV ème PARTIE

7. SYSTEMES PASSIFS - LEMME REEL POSITIF

Dans ce chapitre, ainsi que dans les deux suivants, on va s'efforcer de développer et généraliser en dimension infinie, pour des espaces de Hilbert abstraits, des résultats de la théorie des systèmes, en vue d'applications aux jeux différentiels (chapitres 10 et 11).

On va s'intéresser aux systèmes passifs et chercher à les caractériser de manière "algébrique", ce qui s'avèrera utile pour l'étude de l'équation de Riccati.

Avant d'exposer les résultats démontrés dans la suite, précisons les notations et hypothèses :

7.1 Notations

On se place dans le cadre habituel de deux espaces de Hilbert réels V et H tels que $V \subset H \subset V'$, les injections étant continues et H étant séparable.

On considère un opérateur :

$$(7.1) \quad \begin{cases} A \in \mathscr{L}(V;V'), \ \lambda\text{-coercif} : \exists \ \alpha > 0 \text{ et } \lambda \geq 0 \text{ tels que :} \\ (Av,v) + \lambda|v|^2 \geq \alpha\|v\|^2 \quad , \quad \forall\, v \in V . \end{cases}$$

On sait alors que A est générateur d'un semi-groupe fortement continu dans H, et (on suppose) que le domaine de A, D(A), est égal à V On peut donc considérer A comme un opérateur de V dans H (Lions [14]). On notera comme précédemment $\{\Lambda(t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ le semi-groupe fortement continu engendré par A.

Soit U un Hilbert réel destiné à être l'ensemble des contrôles. On définit :

$$(7.2)\quad \begin{cases} B \in \mathcal{L}(H;U), \quad C \in \mathcal{L}(H;U) \quad , M \in \mathcal{L}(U;U) \ ; \\ \bar{M} = M + i_U^{-1} M^* i_U \ , \ i_U \text{ étant l'injection canonique de} \\ U \text{ dans } U' \end{cases}$$

On considère le système entrées-sorties suivant :

$$(7.3)\quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay = Bv \quad , \quad t > t_o \quad , t_o > 0 \text{ donné .} \\ y(t_o) = y_o \\ z = Cy + Mv \ . \end{cases}$$

L'entrée est $v \in U$, l'état est $y \in H$ (c'est l état instantané On parlera aussi d'état pour $y \in L^2(t_o,T;V)$, état global sur $[t_o,T]$) , et la sortie est $z \in U$

7.2. D-passivité et rétro-commandabilité

On introduit les définitions suivantes :

Définition 7.1 : Le système (7.3) est dit passif si et seulement si, étant donné $\tau \geq 0$ tel que $y(\tau) = 0$, on a :

$$\int_\tau^T 2(z,v)_U dt \geq 0 \ , \ \forall\ T \geq \tau \ , \ \forall\ v \in L^2(\tau,T;U) \ .$$

Définition 7.2 : Soit $D \in \mathcal{L}(H;H)$ Le système (7.3) est dit passif relativement à D, ou D-passif, si et seulement si, étant donné $\tau \geq 0$ tel que $y(\tau) = 0$, on a :

$$\int_\tau^T 2\{(Dy,y) + (z,v)_U\} dt \geq 0 \ , \ \forall\ T \geq \tau \ , \ \forall\ v \in L^2(\tau,T;U) \ .$$

Si l'on interprète les quantités "$\int_\tau^T 2(z,v)_U dt$" et "$\int_\tau^T 2\{(Dy,y) + (z,v)_U\}dt$" comme des énergies entrant dans le système décrit par (7.3), un système passif (resp. D-passif) est un système qui ne peut céder de l'énergie lorsqu'il est au repos, ou encore, qui ne peut abandonner son état d'équilibre ($y(\tau) = 0$) que si "l'extérieur" lui cède de l'énergie .

On va aussi utiliser la :

Définition 7.3. : Soit $t_o > 0$. Le système (7.3) est dit rétro-commandable (en t_o) si et seulement si $\forall\ y_o \in H$, $\exists \tau \in [0,t_o[$ et $\exists\ \tilde{v} \in L^2(\tau,t_o;U)$ tels que $\tilde{v}$ transfère l'état $\tilde{y}$ de :

$$\tilde{y}(\tau) = 0 \text{ à } \tilde{y}(t_o) = y_o .$$

La rétro-commandabilité diffère de la controlabilité par le fait que l'on cherche un temps initial et non un temps final .

Lorsque l'état est donné par une équation différentielle ordinaire, ou, plus généralement, lorsque A est générateur d'un groupe fortement continu dans H, la rétro-commandabilité équivaut à la controlabilité .

Une condition nécessaire et suffisante de rétro-commandabilité est donnée par la :

PROPOSITION 7.1. : *Une condition necessaire et suffisante pour que le système (7.3) soit rétro-commandable est que :*

$\exists\ \tau \in [0,t_o[$ *et* $\gamma > 0$ *tels que* :

$$C(t_o,\tau) = \int_\tau^{t_o} \Lambda(t_o\ s)BB^*\Lambda^*(t_o\ s)ds \geq \gamma I$$

où $C(t_o,\tau)h \stackrel{def}{=} \int_\tau^{t_o} \Lambda(t_o-s)BB^*\Lambda^*(t_o\ s)hds\ ,\ \forall\ h \in H$

Démonstration : Si le système (7.3) est rétro-commandable, on a :

$\forall y_o \in H$, $\exists \tau \in [0,t_o[$ et $\tilde{v} \in L^2(\tau,t_o;U)$ tels que si

$\tilde{y}(t) = \int_\tau^t \Lambda(t-s)B\tilde{v}(s)ds$, on a : $\tilde{y}(\tau) = 0$, $\tilde{y}(t_o) = y_o$,

soit : $y_o = \int_\tau^{t_o} \Lambda(t_o\ s)B\tilde{v}(s)ds$

Donc nécessairement l'opérateur $\int_0^{t_o} \Lambda(t_o\ s)Bds$ de $L^2(0,t_o;U)$ dans H, est surjectif, ou, de manière équivalente :

$\exists \gamma > 0$ tel que : $|C(t_o,0)h| \geq \gamma|h|$, $\forall\ h \in H$.

Donc, par continuité, on peut trouver $\tau \in [0,t_o[$ et γ vérifiant: $0 < \gamma < \gamma$ tels que :

$$C(t_o,\tau) = \int_\tau^{t_o} \Lambda(t_o - s)BB^*\Lambda^*(t_o - s)ds \geq \gamma I$$

Réciproquement, si $C(t_o,\tau) \geq \gamma I$, l'opérateur $\int_\tau^{t_o} \Lambda(t_o-s)Bds$ est surjectif et donc $\forall\, y_o \in H$, $\exists\, \tilde{v} \in L^2(\tau,t_o;H)$ tel que :

$y_o = \int_\tau^{t_o} \Lambda(t_o - s)B\tilde{v}(s)ds$, ce qui achève la démonstration

On remarque d'autre part que $C(t_o,\tau) \geq \gamma I$ équivaut à $C(t_o,0) \geq \gamma I$.

En effet, si le système (7.3) est rétro-commandable en $t_o > 0$, on a : $C(t_o,0) = \int_0^{t_o} \Lambda(t_o - s)BB^*\Lambda^*(t_o - s)ds$

$$= \int_0^\tau \Lambda(t_o - s)BB^*\Lambda^*(t_o - s)ds + C(t_o,\tau) \geq \gamma I$$

Réciproquement, si $C(t_o,0) \geq \gamma I$ il suffit de prendre $\tau = 0$ pour avoir la rétro-commandabilité

7.3. Le lemme positif réel. Présentation.

On est maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal qui est une généralisation dans des espaces de Hilbert abstraits du lemme positif réel.

THEOREME 7.1.: *On suppose que les hypothèses (7.1) à (7.3) ont lieu, que* $U = H$, *que* H *est un Hilbert quelconque (son produit scalaire et sa norme seront notés* $(\ ,.)_H$ *et* $\|\ \|_H$ *respectivement), que* $D \in \mathcal{L}(H;H)$, $D \leq 0$, *(on notera* $\bar{D} = D+D^*$ *) et que le système (7.3) est rétro-commandable*

Une condition nécessaire et suffisante pour que (7.3) soit D-passif est qu'il existe un triplet (P,L,W) *défini par :*

$$(7.4)\quad \begin{cases} P \in \mathcal{L}(H;H)\ ,\ P^* = P\ ,\ P \geq 0 \\ L \in \mathcal{L}(H;H)\ ,\ (A^*P + PA + \bar{D})h = L^*Lh\ ,\ \forall\, h \in V \\ W \in \mathcal{L}(H;H)\ ,\ \bar{M} = W^*W \\ C = B^*P + W^*L \text{ dans } \mathcal{L}(H;H)\ . \end{cases}$$

En outre, P, L *et* W *vérifient la relation :*

$$
(7.5)\quad \begin{cases} \int_{t_o}^{T} 2\{(Dy,y) + (z,v)\}dt = (Py(T),y(T)) \quad (Py_o,y_o) + \\ \qquad\qquad\qquad + \int_{t_o}^{T} \|Ly + Wv\|_H^2 dt \\ \forall\ T \geq t_o\ ,\ \forall\ v \in L^2(t_o,T;H)\ . \end{cases}
$$

La formule (7.5) généralise pour des espaces de Hilbert, l'inégalité de dissipation ("dissipation inequality") qui s'est avérée fondamentale dans l'étude :

de l'équation de Riccati (Willems [23]) et de la théorie des réseaux électriques passifs (Anderson & Brockett [1]), pour les systèmes linéaires déterministes en dimension finie;

de l'identification et de la réalisation markovienne d'un processus gaussien (Faurre [8], Kalman [9]), pour le cas des processus stochastiques;

de l'hyperstabilité des systèmes linéaires à commande en boucle fermée non linéaire (Yakubovich [24], Popov [20], Kalman [10]);

de la positivité, de la stabilité, du contrôle optimal et du problème inverse d'une classe de systèmes non linéaires (Moylan [17], Moylan & Anderson [18], Clerget & Germain [7])

On peut interpréter la formule (7.5) de deux manières :

1) Supposons que $y_o = 0$. La quantité $\int_{t_o}^{T} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$ qui est alors positive par D-passivité, peut être assimilée à la covariance du processus gaussien centré stationnaire z, la quantité $\int_{t_o}^{T} |Ly + Wv|^2 dt$ à la covariance du bruit blanc : $\begin{pmatrix} Bv \\ Mv \end{pmatrix}$, et P est alors la covariance de l'état markovien à identifier y Dans ce cas, P est appelé réalisation markovienne du processus z (Faurre [8]).

2) Si l'on reprend l'analogie entre $\int_0^T 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$ et une énergie entrante, on peut interpréter $(Py(T),y(T))-(Py_o,y_o)$ comme l'énergie stockée par le système entre t_o et T, et $\int_0^T \| Ly + Wv\|_H^2 dt$ comme l'énergie dissipée dans le même intervalle de temps. La formule (7.5) traduit alors la conservation de l'énergie :

Energie entrante = Energie stockée + Energie dissipée .(Moylan|17|

Après avoir donné au §7.6 des caractérisations équivalentes à(7.4) d'un système D-passif, en particulier dans le domaine fréquentiel, on montre au chapitre 8 que l'ensemble $\mathcal{R}$ des P vérifiant (7.4) est convexe et a un élément minimal .

Au chapitre 9, supposant en plus que A engendre un groupe fortement continu, on montrera que cet ensemble $\mathcal{R}$ a aussi un élément maximal.

Les applications de cette étude seront données dans les chapitres 10 et 11, où :

-on montre la connection entre les opérateurs P vérifiant (7.4) et le point-selle en boucle fermée d'un jeu différentiel linéaire quadratique dans un cas non standard ($D_2 \leq 0$) au chapitre 10;

- on construit, au chapitre 11, la fonction coût pour laquelle un couple donné de stratégies est optimal (problème inverse).

En cours de route, une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un point-selle en boucle fermée est démontrée.

7.4. Démonstration du lemme positif réel : condition nécessaire

Pour démontrer le théorème 7.1, on a besoin d'établir plusieurs résultats intermédiaires :

LEMME 7.1.: *Si (7.3) est D-passif, on a nécessairement :*

$$\bar{M} \geq 0 \ \textit{et} \ \exists W \in \mathcal{L}(H;H) \ \textit{tel que} \ W^*W = \bar{M} .$$

Démonstration : Supposons, au contraire, que l'on peut trouver un $v_o \in H$ tel que $(\bar{M}v_o, v_o) < 0$.

Soit alors la fonction $I_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} \text{ si } \tau \leq t \leq \tau + \frac{1}{n} \\ 0 \text{ si } t \geq \tau + \frac{1}{n} \end{cases}$

définie sur $[\tau,\infty[$, $\forall$ $n \in \mathbb{N}^*$

Vérifions que $v_n(t) \overset{\text{def}}{=} v_o.I_n(t)$ est bien un élément de $\mathbf{L}^2(\tau,T;H)$, $\forall$ $T \geq \tau$, $\forall$ $n > 0$:

$$\int_\tau^T |v_n|^2 dt = \int_\tau^{\tau+\frac{1}{n}} n|v_o|^2 dt = |v_o|^2 < +\infty .$$

Alors l'état $y_n(t) = \int_\tau^t \Lambda(t-s)Bv_n(s)ds$ vaut :

$$y_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}\int_\tau^t \Lambda(t-s)Bv_o ds & \text{si} \quad t \in [\tau,\tau + \frac{1}{n}[\\ \sqrt{n} \int_\tau^{\tau+1/n} \Lambda(\tau + \frac{1}{n} \quad s)Bv_o ds & \text{si} \quad t \geq \tau + \frac{1}{n} \end{cases}$$

On a alors :

$$\int_\tau^T (Cy_n,v_n)dt = n\int_\tau^{\tau+1/n}(\int_\tau^t C\Lambda(t-s)Bv_o ds, v_o)dt$$

Soit :

$$|\int_\tau^T 2(Cy_n,v_n)dt| \leq \frac{2}{n}||C|| \ ||B|| \ |v_o|^2 \sup_{t,s\in[\tau,T]} ||\Lambda(t-s)|| \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{n}$$

Aussi :

$$|\int_\tau^T 2(Dy_n,y_n)dt| = 2n|\int_\tau^{\tau+1/n}(\int_\tau^t D\Lambda(t-s)Bv_o ds, \int_\tau^t \Lambda(t-s)Bv_o ds)dt|$$

$$\leq \frac{2}{n^2}\|D\| \ \|B\|^2 |v_o|^2 \sup_{t,s\varepsilon|\tau,T|} \|\Lambda(t-s)\|^2 \overset{def}{=} \frac{b}{n^2} .$$

Donc :

$$|\int_\tau^T 2\{(Dy_n,y_n) + (Cy_n,v_n)\}dt| \leq \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} \quad , \text{ soit :}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\tau^T 2\{(Dy_n,y_n) + (Cy_n,v_n)\}dt = 0$$

Or on a : $\int_\tau^T 2(Mv_n,v_n)dt = n\int_\tau^{\tau+1/n}(\bar{M}v_o,v_o)dt = (\bar{M}v_o,v_o) \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

Donc, compte tenu de la D-passivité :

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\int_\tau^T 2\{(Dy_n,y_n)+(Cy_n,v_n)+(Mv_n,v_n)\}dt = (\bar{M}v_o,v_o) \quad .$$

Mais, par hypothèse : $(\bar{M}v_o,v_o) < 0$, ce qui est contradictoire, et donc $\bar{M} \geq 0$.

On sait alors que l'on peut trouver $W \in \mathcal{L}(H;\mathcal{H})$ tel que $\bar{M} = W^*W$.(En particulier, on peut prendre $\mathcal{H} = H$, $W = \bar{M}^{1/2}$. C'est le choix que nous ferons dans la suite).

<u>LEMME 7.2.</u>: *Si le système (7.3) est rétro-commandable, le contrôle :*

$$u^*(s) = B^*\Lambda^*(t_o\ s)(\int_\tau^{t_o}\Lambda(t_o\ \sigma)BB^*\Lambda^*(t_o\ \sigma)d\sigma)^{\ 1}y_o$$

transfère l'état de $y^*(\tau) = 0$ *à* $y^*(t_o) = y_o$.

De plus :

$$(7.6) \qquad \int_\tau^{t_o} 2\{(Dy^*,y^*) + (z^*,u^*)\}dt \leq \rho|y_o|^2 \quad .$$

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition 7.1, $\exists$ $\tau \in [0,t_o[$ et $\gamma > 0$ tels que :

$$C(t_o,\tau) = \int_\tau^{t_o}\Lambda(t_o\ s)BB^*\Lambda^*(t_o\ s)ds \geq \gamma I$$

donc $C(t_o,\tau)$ est un isomorphisme de H sur H et $(C(t_o,\tau))^{-1}$ existe et est continu sur H.

L'état y^* vérifie donc :

$$y^*(t_o) = \int_\tau^{t_o} (\Lambda(t_o-s)BB^*\Lambda^*(t_o-s))(C(t_o,\tau))^{-1}y_o ds$$

$$= C(t_o,\tau)(C(t_o,\tau))^{-1}y_o = y_o$$

Finalement, comme u^* ne dépend que des données, de τ et de y_o, et comme $y^*(\tau) = 0$, il en est de même de y^* et de z^* et on vérifie facilement que :

$$\int_\tau^{t_o} 2\{(Dy^*,y^*) + (z^*,u^*)\}dt \leq \rho|y_o|^2$$

où ρ ne dépend que de τ et des données, d'où le résultat.

<u>LEMME 7.3.</u>: *Si le système (7.3) est* D-*passif et rétro-commandable, et si* $D \leq 0$ *, on a :*

(7.7) $$0 \leq V(y_o,t_o,T) \overset{\text{def}}{=} \inf_{v\in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$$

$$\leq \rho|y_o|^2 \qquad \forall\ T \geq t_o\ (T = +\infty \text{ éventuellement})$$

<u>Démonstration</u> : Par la D-passivité, on a :

$$\int_\tau^{T} 2\{(Dy,y) + (z,v)\}dt = \int_\tau^{t_o} 2\{(Dy,y) + (z,v)\}dt +$$

$$+ \int_{t_o}^{T} 2\{(Dy,y) + (z,v)\}dt \geq 0 ,$$

$\forall\ T \geq \tau,\ \forall\ v \in L^2(\tau,T;H)$.

Prenons $v = \begin{cases} u^* \text{ si } t \in [\tau,t_o[\\ \bar{v} \text{ quelconque si } t \geq t_o,\ v \in L^2(t_o,T;H) \end{cases}$.

Alors on a :

$$\int_\tau^{t_o} 2\{(Dy^*,y^*) + (z^*,u^*)\}dt + \int_{t_o}^{T} 2\{(D\bar{y},\bar{y}) + (\bar{z},v)\}dt \geq 0$$

ou :

$$\int_{t_o}^{T} 2\{(D\bar{y},y)+(\bar{z},\bar{v})\}dt \geq \int_\tau^{T} 2\{(Dy^*,y^*)+(z^*,u^*)\}dt \geq \rho|y_o|^2$$

d'après le lemme 7.2.

Donc $\int_{t_o}^{T} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$ est borné inférieurement $\forall\ v \in L^2(t_o,T;H)$, et on a :

$$\inf_{v\in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt \geq -\rho|y_o|^2 .$$

Comme d'autre part on a :

$$\inf_{v\in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt \leq \int_{t_o}^{T} 2\{(Dy(t,0),y(t,0))+ +(z(t,0),0)\}dt$$

où $y(t,0)$ est l'état pour le contrôle 0 et $z(t,0)$ la sortie pour ce même contrôle Comme $D \leq 0$, on a :

$$\inf_{v\in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt \leq 0 .$$

Donc, si l'on pose : $V(y_o,t_o,T) = \inf_{v} \int_{t_o}^{T} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$,

on obtient (7.7). Comme T est arbitraire et que les bornes de (7.7) ne dépendent pas de T, (7.7) a lieu aussi pour $T = +\infty$.

<u>LEMME 7.4.</u>: *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$V(y_o) = \inf_{v\in L^2(t_o,\infty;H)} \int_{t_o}^{\infty} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} V(y_o,t_o,T) \quad , \forall\ y_o \in H\ , \forall\ t_o > 0$$

et $V(y_o)$ *est indépendante de* t_o. *De plus :*

$$\exists P_T(t) \in \mathcal{L}(H;H)\ ,\ P_T(t)^* = P_T(t)\ ,\ P_T(t) \geq 0\ ,\ \forall\ t \in [t_o,T]$$

et $(P_T(t)y_t,y_t) = V(y_t,t,T)$

$$= \inf_{v\in L^2(t,T;H)} \int_{t}^{T} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt\ ,$$

$\forall\ t \in [t_o,T] \quad \forall\ y_t \in H\ , \forall\ T > t_o$

Enfin :

$\exists\ P \in \mathcal{L}(H;H)$, $P^* = P$, $P \geq 0$,*tel que* :

$(Py_o, y_o) = V(y_o)$, $\forall\ y_o \in H$

<u>Démonstration</u> : Comme on a :

$0 \leq V(y_o,t_o,T) \leq \rho|y_o|^2$, t_o et y_o étant fixés, les bornes sont indépendantes de T, et donc on peut trouver une suite $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = +\infty$ et :

$$\lim_{n\to\infty} V(y_o,t_o,T_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname*{Inf}_{v} \int_{t_o}^{T_n} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$$

Mais comme :

$$\operatorname*{Inf}_{v} \int_{t_o}^{\infty} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt = V(y_o,t_o,\infty) \text{ existe et est fini,}$$

c'est nécessairement la limite et :

$\lim\limits_{n\to\infty} V(y_o,t_o,T_n) = V(y_o,t_o,\infty)$, la limite étant indépendante de la suite $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

On a donc :

$$\lim_{T\to\infty} \operatorname*{Inf}_{v\in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt = V(y_o,t_o,\infty)$$

Mais comme le système (7.3) est autonome, on a :

$$\lim_{T\to\infty} \operatorname*{Inf}_{v\in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \operatorname*{Inf}_{v\in L^2(t_1,T+t_1-t_o;H)} \int_{t_1}^{T+t_1-t_o} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$$

$= V(y_o,t_1,\infty)$ et $V(y_o,t_o,\infty)$ ne dépend que de y_o . On note donc :

$$V(y_o) = \operatorname*{Inf}_{v\in L^2(t_o,\infty;H)} \int_{t_o}^{\infty} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt = V(y_o,t_o,\infty) .$$

Enfin, comme $V(y_o,t_o,T)$ est l'infimum d'une fonctionnelle quadratique, on a(Molinari [16]) :

$\forall\ T > t_o$, $\forall s \in [t_o, T]$, $\exists\ P_T(s) \in \mathcal{L}(H;H)$, $P_T(s)^* = P_T(s)$, tel que :

$(P_T(s)h,h) = V(h,s,T)$, $\forall\ h \in H$

Et comme : $0 \leq V(h,s,T) \leq \rho|h|^2$, on a :

$P_T(s) \geq 0$ et $\| P_T(s)\|_{\mathcal{L}(H;H)} \leq \rho$, $\forall\ s \in [t_o, T]$.

De plus, on a : $P_T(T) = 0$.

Finalement, pour $T = +\infty$, comme $V(y_o)$ est indépendante de t_o, on a :

$\exists\ P \in \mathcal{L}(H;H)$, $P^* = P$, $P \geq 0$, $\| P\|_{\mathcal{L}(H;H)} \leq \rho$, tel que :

$(Ph,h) = V(h)$, $\forall\ h \in H$, ce qui termine la démonstration .

<u>LEMME 7.5.</u>: *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

L'application : $t \mapsto P_T(t)$ *est presque partout différentiable sur* $[t_o, T]$, $\forall\ T > t_o$, *et, plus précisément* :

$\forall\ t_1, t_2 \in [t_o, T]$, $\forall\ h \in H$, *on a* :

$|((P_T(t_1) - P_T(t_2))h,h)| \leq c|t_1 - t_2|$

<u>Démonstration</u> : Soient τ et τ vérifiant: $t_o \leq \tau \leq \tau < T$.
On peut construire une bijection de $[\bar{\tau}, T]$ sur $[\tau, T]$ par l'homothétie :

$$\theta(t) = \tau + \frac{T-\tau}{T-\tau}(t-\tau) \quad , \quad \forall\ t \in [\tau, T]$$

On notera t le point courant de $[\tau, T]$ et θ celui de $[\tau, T]$.

Soit alors $v \in L^2(\tau,T;H)$. Posons : $v(\theta(t)) \stackrel{def}{=} v(t)$ et $v \in L^2(\tau,T;H)$ puisque :

$$\int_\tau^T |v(\theta)|^2 d\theta = \frac{T-\bar{\tau}}{T-\tau} \int_\tau^T |v(t)|^2 dt < +\infty$$

Construisons alors :

$$y(\theta) = \Lambda(\theta-\tau)h + \int_\tau^\theta \Lambda(\theta-\sigma)Bv(\sigma)d\sigma$$

$$y(t) = \Lambda(t-\tau)h + \int_\tau^t \Lambda(t-s)Bv(s)ds$$

On a : $y(\theta(t)) = \Lambda(\theta(t)-\tau)h + \frac{T-\tau}{T-\tau}\int_\tau^t \Lambda(\theta(t)-\theta(s))Bv(s)ds$.

Donc, y vérifie l'équation :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\bar{y}(\theta(t)) + \frac{T-\tau}{T-\bar{\tau}} A\bar{y}(\theta(t)) = Bv(t) \\ y(\theta(\tau)) = y(\tau) = h \ , \end{cases}$$

ou encore :

$$\text{(7.8)} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}y(\theta(t)) + Ay(\theta(t)) = \frac{\tau-\tau}{T-\bar{\tau}} Ay(\theta(t)) + Bv(t) \\ \bar{y}(\theta(\tau)) = h \end{cases}$$

et comme y vérifie :

$$\text{(7.9)} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) + Ay(t) = Bv(t) \\ y(\tau) = h \ , \end{cases}$$

on obtient, en faisant la différence de (7.8) et (7.9) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\bar{y}(\theta(t))-y(t)) + A(y(\theta(t))-y(t)) = \frac{\tau-\tau}{T-\bar{\tau}}Ay(\theta(t)) \\ \bar{y}(\theta(\tau)) \quad y(\tau) = 0 \end{cases}$$

et en multipliant scalairement par $(\bar{y}(\theta(t)-y(t))$, on a, après avoir intégré entre τ et σ :

$$\frac{1}{2}|\bar{y}(\theta(\sigma))-y(\sigma)|^2 + \alpha\int_\tau^\sigma \| \bar{y}(\theta(t))-y(t)\|^2 dt \leq \lambda\int_\tau^\sigma |\bar{y}(\theta(t))-y(t)|^2 dt +$$

$$+\left|\frac{\tau-\bar{\tau}}{T-\bar{\tau}}\right| \left|\int_\tau^\sigma (A\bar{y}(\theta(t)), y(\theta(t))-y(t))dt\right|$$

donc en multipliant par 2 et en utilisant le fait que $2ab \leq a^2 + b^2$, on a :

$$|\bar{y}(\theta(\sigma))-y(\sigma)|^2 + 2\alpha\int_\tau^\sigma \| y(\theta(t))-y(t)\|^2 dt \leq (2\lambda+1)\int_\tau^\sigma |y(\theta(t))-y(t)|^2 c$$

$$+\left|\frac{\tau-\tau}{T-\bar{\tau}}\right|^2 \int_\tau^\sigma |A\bar{y}(\theta(t))|^2 dt$$

soit, en supposant que $\tau \in [\tau,\tau_0]$ où $\tau_0 < T$ est arbitrairement choisi, et si l'on pose :

$$c = \frac{1}{|T-\tau_0|^2} \int_\tau^T |Ay(\theta(t))|^2 dt < +\infty ,$$

$$|y(\theta(\sigma))-y(\sigma)|^2 + 2\alpha\int_\tau^\sigma \| y(\theta(t))-y(t)\|^2 dt \leq (2\lambda+1)\int_\tau^\sigma |y(\theta(t))-y(t)|^2 dt$$
$$+ c|\tau-\bar{\tau}|^2 .$$

Alors en utilisant l'inégalité de Gronwall :

$$|\bar{y}(\theta(\sigma))-y(\sigma)|^2 \leq c|\tau-\tau|^2 e^{(2\lambda+1)\sigma} \quad \forall \sigma \in [\tau,T].$$

Donc : $\max\limits_{t\in[\tau,T]} |y(\theta(t))-y(t)| \leq c|\tau-\bar{\tau}|$ dès que $\bar{\tau} \in [\tau,\tau_0]$.

Il est alors facile de voir que, si l'on pose :

$$\bar{z}(\theta(t)) = C\bar{y}(\theta(t)) + Mv(\theta(t)) = C\bar{y}(\theta(t)) + Mv(t), \text{ et:}$$

$$z(t) = Cy(t) + Mv(t) \text{ , on a :}$$

$$\max_{t\in[\tau,T]} |z(\theta(t))-z(t)| \leq c|\tau-\tau| , \ \forall \tau \in [\tau,\tau_0] .$$

On peut alors majorer la différence :

$$\Delta = \int_{\bar{\tau}}^T 2\{(D\bar{y}(\theta),\bar{y}(\theta))+(\bar{z}(\theta),v(\theta))\}d\theta - \int_\tau^T 2\{(Dy(t),y(t))+(z(t),v(t))\}d$$

$$= \frac{T-\tau}{T-\tau} \int_\tau^T 2\{(Dy(\theta(t)),y(\theta(t)))+(\bar{z}(\theta(t)),v(t))\}dt$$

$$\int_\tau^T 2\{(Dy(t),y(t))+(z(t),v(t))\}dt$$

$$= \frac{\tau-\bar{\tau}}{T-\tau} \int_\tau^T 2\{(D\bar{y}(\theta(t)),y(\theta(t)))+(\bar{z}(\theta(t)),v(t))\}dt +$$

$$+\int_\tau^T \{(D(\bar{y}(\theta(t))-y(t)),\bar{y}(\theta(t))+y(t))+2(z(\theta(t))-z(t),v(t))\}dt$$

par : $|\Delta| \leq c_1|\tau-\tau| + c_2|\tau-\bar{\tau}| + c_3|\tau-\tau| = c_0|\tau-\bar{\tau}|$.

Donc :

$$\int_{\bar{\tau}}^T 2\{(D\bar{y}(\theta),\bar{y}(\theta))+(\bar{z}(\theta),v(\theta))\}d\theta \leq \int_\tau^T 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt + c_0|\tau-\tau|$$

et a fortiori :

$$\operatorname*{Inf}_{v\in L^2(\tau,T;H)} \int_\tau^T 2\{(Dy,y)+(z,v)\}d\theta \leq \operatorname*{Inf}_{v\in L^2(\tau,T;H)} \int_\tau^T 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt +$$

$$+ c_o|\tau-\tau| \;.$$

L'inégalité inverse s'obtient de la même façon,et on a prouvé que :

$$|(P_T(\tau)h,h)-(P_T(\tau)h,h)| \leq c|\tau-\tau|, \;\forall\, \tau \in [\tau,\tau_o] \text{ et } \forall\, h \in H$$

L'application : $t \longmapsto P_T(t)$ est donc absolument continue (puisque Lipschitz continue) , donc presque partout différentiable ,ce qui achève de démontrer le lemme .

<u>LEMME 7.6.</u> : *Sous les hypothèses précédentes et si de plus* $\bar{M}$ *est* H-*elliptique, une condition nécessaire et suffisante pour que le minimum de* $\int_{t_o}^T 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$ *soit atteint dans* $L^2(t_o,T;H)$ *est que* P_T *vérifie l'équation d'Hamilton-Jacobi :*

$$(7.10)\quad \begin{cases} \left(\left(\dfrac{dP_T(t)}{dt} + A^*P_T(t) + P_T(t)A + \bar{D}\right)h,h\right) + \\ \qquad + \operatorname*{Min}_{v\in H}\{2((C-B^*P_T(t))h,v) + (\bar{M}v,v)\} = 0 \\ \qquad\qquad \forall\, h \in H, \text{ p.p } t \in [t_o,T] \\ P_T(T) = 0 \end{cases}$$

et le minimum est atteint pour :

$$u(t,y) = \bar{M}^{\;1}(C-B^*P_T(t))y \quad , \quad \forall\, y \in H \;,\; \text{p.p. } t \in [t_o,T].$$

<u>Démonstration</u> : Soient t et τ vérifiant : $t_o \leq t \leq \tau < T$.

Comme : $\int_t^T 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt = \int_t^\tau 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt + \int_\tau^T 2\{(Dy,y)+$
$+(z,v)\}dt$,

on déduit facilement que :

$$(7.11)\qquad (P_T(t)h,h) \leq \int_t^\tau 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt \quad (P_T(\tau)y(\tau,v),y(\tau,v))$$
$$\forall\, v \in L^2(t,\tau;H) \;,\; \forall\, h \in V$$

avec la notation: $y(\tau,v)$ pour l'état à l'instant τ engendré par la commande v .

Comme on sait d'après le lemme 7.5 que l'application $t \longmapsto P_T(t)$

est presque partout différentiable sur $[t_o,T]$ et que :

$$\frac{d}{dt}(P_T(t)y(t),y(t)) = ((\frac{d}{dt}P_T(t))y(t),y(t)) + 2(P_T(t)y(t),\frac{dy}{dt}(t)) \ ,$$

p.p. $t \in [t_o,T]$, où $y(t)$ est solution de :

$$\frac{dy}{dt} + Ay = Bv \ , \quad y(t_o) = y_o$$

et vérifie : $y \in W_H(t_o,T) \overset{def}{=} \{\phi | \phi \in L^2(t_o,T;V), \frac{d\phi}{dt} \in L^2(t_o,T;H)\}$

En divisant (7.11) par $\tau - t$ et en faisant tendre τ vers t, compte-tenu du fait que $\frac{dy}{dt} = Bv - Ay$, on a :

$$((\frac{d}{dt}P_T(t))h,h) + 2(P_T(t)h,Bv - Ah) - (\bar{D}h,h) - 2(Ch + Mv,v) \geq 0$$

$\forall \ h \in V$, p.p. $t \in [t_o,T]$, $\forall \ v \in H$.

Soit :

$$(((\frac{d}{dt}P_T(t))+A^*P_T(t)+P_T(t)A+\bar{D})h,h)+2((C-B^*P_T(t))h,v)+(\bar{M}v,v) \geq 0$$

$\forall \ h \in V$, $\forall \ v \in H$, p.p. $t \in [t_o,T]$, et donc, si le minimum est atteint sur $L^2(t_o,T;H)$, on a (7.10) .

Reste à montrer que la condition (7.10) est *suffisante*. Supposons que (7.10) est vérifié et soit $u \in H$ l'argument du minimum :

$$\underset{v \in H}{\mathrm{Min}}\{2((C-B^*P_T(t))h,v)+(\bar{M}v,v)\} = 2((C-B^*P_T(t))h,u)+(\bar{M}u,u)$$

Donc u est la solution de l'équation variationnelle :

$$\begin{cases} ((C-B^*P_T(t))h+\bar{M}u,v) = 0 \ , & \forall \ v \in H \\ u \in H \ , & \end{cases}$$

soit : $\quad u = -\bar{M}^{-1}(C-B^*P_T(t))h$

Alors, comme $h = y(t)$, en réinjectant $u(t)$ dans (7.3) :

$$\frac{dy}{dt} + (A+B\bar{M}^{-1}(C-B^*P_T(t)))y = 0$$

$$y(t_o) = y_o \ ,$$

on obtient que $y \in W_H(t_o,T)$ et donc que :

$$u(.,y(.)) = \bar{M}^{-1}(C-B^{*}P_T(.))y(.) \in L^2(t_o,T;H)$$

On peut donc intégrer (7.10) entre t_o et T, ce qui donne :

$$\int_{t_o}^{T}\{((\frac{d}{dt}P_T(t))y(t),y(t))+2(P_T(t)y(t),\frac{dy}{dt}(t))\}dt +$$

$$+ \int_{t_o}^{T}2\{(Dy(t),y(t))+(z(t),u(t))\ dt\}= 0 ,$$

et comme $P_T(T) = 0$, on a :

$$(P_T(t_o)y_o,y_o) = \int_{t_o}^{T}2\{(Dy(t),y(t))+(z(t),u(t))\}dt .$$

D'autre part, refaisant le même calcul pour $v \in L^2(t_o,T;H)$ quelconque, on obtient :

$$(P_T(t_o)y_o,y_o) \leq \int_{t_o}^{T}2\{(Dy(t),y(t))+(z(t),v(t))\}dt ,$$

et donc : $(P_T(t_o)y_o,y_o) = \underset{v\in L^2(t_o,T;H)}{\mathrm{Min}} \int_{t_o}^{T}2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$.

Or, dans le courant de la démonstration, on a montré que u solution dans H du problème de minimisation :

$$\begin{cases} 2((C-B^{*}P_T(t))h,u)+(\bar{M}u,u) \leq 2((C-B^{*}P_T(t))h,v)+(\bar{M}v,v), \forall\ v \in H \\ u \in H \end{cases}$$

existait. Cela prouve donc que :

$$u(t,y(t)) = \bar{M}^{-1}(C-B^{*}P_T(t))y(t)$$

réalise le minimum dans $L^2(t_o,T;H)$ de $\int_{t_o}^{T}2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$, et le lemme est démontré.

<u>COROLLAIRE 7.1.</u>: *L'opérateur* $P_T(t)$ *vérifie l'équation de Riccati*

$$(7.12)\quad \begin{cases} P_T(t) \in \mathcal{L}(H;H)\ ,\ P_T(t)^{*} = P_T(t)\ ,\ P_T(t) \geq 0\ ,\ \forall t \in [t_o,T] \\ ((\ (\frac{d}{dt}P_T(t))+A^{*}P_T(t)+P_T(t)A-(C-B^{*}P_T(t))^{*}\bar{M}^{-1}(C-B^{*}P_T(t))\ + \\ \qquad +\bar{D})h,h) = 0\ ,\ \forall\ h \in V\ ,\ \text{p.p. } t \in [t_o,T] \\ P_T(T) = 0 \end{cases}$$

Démonstration : Il suffit de remplacer u par sa valeur dans (7.10)

LEMME 7.7.: Soit $L_T(t) = (M^{-1/2})^{-1}(C-B^*P_T(t)) \in \mathcal{L}(H;H), \forall t \in [t_o,T]$

et posons :

$$\tilde{P}_T(t) = \begin{cases} P_T(t) \text{ si } t \in [t_o,T] \\ 0 \quad \text{si} \quad t \geq T \end{cases}$$

On a :

$$\lim_{T\to\infty} \tilde{P}_T(t) = P \text{ dans } \mathcal{L}(H;H) \text{ fort }, \ \forall\, t \in [t_o,\infty]$$

$$\lim_{T\to\infty} \tilde{L}_T(t)^*\tilde{L}_T(t) = L^*L \text{ dans } \mathcal{L}(H;H) \text{ fort}, \ \forall\, t \in [t_o,\infty]$$

$$\text{avec } L = (M^{-1/2})^{-1}(C-B^*P)$$

$$\lim_{T\to\infty} (A^*\tilde{P}_T(t) + \tilde{P}_T(t)A) = A^*P+PA \text{ dans } \mathcal{L}(V;V') \text{ fort}, \forall t \in [t_o,\infty]$$

et P *vérifie :*

$$(7.13) \begin{cases} P \in \mathcal{L}(H;H) \ , \ P^* = P \ , \ P \geq 0 \ , \\ (A^*P + PA + \bar{D})h = L^*Lh \quad , \quad \forall\, h \in V \\ C = W^*L + B^*P \quad , \quad (W = M^{-1/2}) \end{cases}$$

Démonstration : D'après les lemmes 7.4 et 7.5, la famille $\{\tilde{P}_T(t)\}_{T \geq t_o}$ est équicontinue et équibornée. Utilisant le théorème d'Ascoli-Arzelà, on peut extraire une suite $\{\tilde{P}_{T_n}(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} T_n = +\infty$ et telle que la suite $\{\tilde{P}_{T_n}(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $[t_o,\infty[$ vers un élément $Q(t) \in \mathcal{L}(H;H)$, soit : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \theta > 0$ tel que $T_n \geq \theta$ implique :

$$\sup_{t\in K} \| \tilde{P}_{T_n}(t) \quad Q(t) \|_{\mathcal{L}(H;H)} \leq \varepsilon$$

K étant un compact quelconque de $[t_o,\theta]$.

Mais, d'après le lemme 7.4, on sait que, t et h étant fixés

$\lim\limits_{T\to\infty} \tilde{P}_T(t)h = Ph$, $\forall\, n \in H$, $\forall\, t \in [t_0,\infty[$

Il vient alors : $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{P}_{T_n}(t) = P$ uniformément sur tout compact de $[t_0,\infty[$. Et comme la limite ne dépend pas de la suite, c'est toute la famille qui converge : $\lim\limits_{T\to\infty} \tilde{P}_T(t) = P$ dans $\mathcal{L}(H;H)$ fort. $\forall\, t \in [t_0,\infty[$.

Par continuité, il en est de même pour $\tilde{L}_T(t)^*\tilde{L}_T(t)$:

$$\| \tilde{L}_T(t)^*\tilde{L}_T(t) \quad L^*L \|_{\mathcal{L}(H;H)} = \|(\bar{M}^{1/2})^{-1}B^*(P-\tilde{P}_T(t))\|_{\mathcal{L}(H;H)}$$

$$\leq c\| P-\tilde{P}_T(t)\|_{\mathcal{L}(H;H)}$$

donc $\lim\limits_{T\to\infty} \tilde{L}_T(t)^*\tilde{L}_T(t) = L^*L$ dans $\mathcal{L}(H;H)$ fort, $\forall\, t \in [t_0,\infty[$.

De même : $\lim\limits_{T\to\infty} (A^*\tilde{P}_T(t) + \tilde{P}_T(t)A) = A^*P+PA$ dans $\mathcal{L}(V;V')$ fort,

$\forall\, t \in [t_0,\infty[$.

Et comme, d'après (7.12), on a :

$$\frac{d}{dt}P_T(t)h = L_T(t)^*L_T(t)h \quad \bar{D}h \quad 2P_T(t)Ah, \ \forall h \in V, \text{p.p.} t\in[t_0 \ T] ,$$

on déduit de ce qui précède que :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{d}{dt}P_T(t)h = \frac{dP}{dt}h = 2PAh \quad L^*Lh + \bar{D}h, \ \forall h \in V, \text{ p.p.} t \in [t_0,\infty[.$$

Mais comme $\frac{dP}{dt} \equiv 0$, on a finalement que :

$$(A^*P + PA + \bar{D})h = L^*Lh \ , \quad \forall\, h \in V \ , \ W^*L = C \quad B^*P \ , \text{ avec } W=\bar{M}^{1/2}.$$

<u>Démonstration du théorème 7.1.</u>: Dans les lemmes précédents, on a montré que si $\bar{M}$ était H-elliptique en plus des hypothèses du théorème, alors dire que (7.3) est D-passif implique qu'il existe (P,L,W) vérifiant (7.4).

On va montrer maintenant que ce résultat reste vrai lorsque $\bar{M} \geq 0$

Pour cela, écrivons $\bar{M}_\varepsilon = \bar{M} + \frac{\varepsilon}{2} I$.

$\bar{M}_\varepsilon$ est bien H-elliptique et on est assuré de l'existence de $(P_\varepsilon, L_\varepsilon, W_\varepsilon)$ vérifiant :

$$(7.4)_\varepsilon \begin{cases} P_\varepsilon \in \mathcal{L}(H;H) \ , \ P_\varepsilon^* = P_\varepsilon \ , \ P_\varepsilon \geq 0 \\ L_\varepsilon \in \mathcal{L}(H;H) \ , \ (A^* P_\varepsilon + P_\varepsilon A + \bar{D})h = L_\varepsilon^* L_\varepsilon h \quad \forall\ h \in V \\ W_\varepsilon \in \mathcal{L}(H;H) \ , \ \bar{M}_\varepsilon = W_\varepsilon^* W_\varepsilon \\ C = B^* P_\varepsilon + W_\varepsilon^* L_\varepsilon \end{cases}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Il faut donc montrer que l'on peut passer à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ et que l'on a (7.4) .

D'abord, on remarque que $\bar{M}_\varepsilon \to \bar{M}$ dans $\mathcal{L}(H;H)$ fort lorsque $\varepsilon \to 0$.

Prenons, comme auparavant, $W_\varepsilon = \bar{M}_\varepsilon^{1/2} \in \mathcal{L}(H;H)$. Utilisant le lemme 7.8 démontré plus loin, on a :

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} W_\varepsilon h = Wh$ dans H fort , $\forall\ h \in H$ avec $W = \bar{M}^{1/2}$.

On va montrer maintenant que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon = P$ dans $\mathcal{L}(H;H)$ fort.

Posons : $V_\varepsilon(y_o, t_o, T) = \inf\limits_{v \in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} 2\{(Dy,y) + (z,v)\}dt$.

Soit u_ε l'argument du minimum qui est atteint dans $L^2(t_o,T;H)$ d'après le lemme 7.6, et soit y_ε l'état correspondant. On a :

$$0 \leq V_\varepsilon(y_o,t_o,T) = \int_{t_o}^{T} 2\{(Dy_\varepsilon,y_\varepsilon)+(Cy_\varepsilon+Mu_\varepsilon,u_\varepsilon)\}dt - \frac{\varepsilon}{2}\int_{t_o}^{T} |u_\varepsilon|^2 dt$$

$$\leq \int_{t_o}^{T} 2\{(Dy_\varepsilon,y_\varepsilon)+(Cy_\varepsilon+Mu_\varepsilon,u_\varepsilon)\}dt$$

$$\leq \int_{\tau}^{t_o} 2\{(Dy^*,y^*)+(z^*,u^*)\}dt \leq \rho|y_o|^2 \text{ d'après le lemme 7.3.}$$

Donc, comme $V_\varepsilon(y_o,t_o,T)$ est borné indépendamment de T, d'après le lemme 7.4, on a :

$$0 \leq V_\varepsilon(y_0) \leq \rho|y_0|^2 \qquad \forall\ \varepsilon > 0.$$

Donc la famille $\{V_\varepsilon(y_0)\}_{\varepsilon>0}$ est bornée indépendamment de ε.

Montrons que la famille $\{V_\varepsilon(y_0)\}_{\varepsilon>0}$ est croissante lorsque ε décroit :

Posons $J_\varepsilon^{y_0}(v) = \int_{t_0}^{T} 2\{(Dy,y) + (Cy+M_\varepsilon v,v)\}dt$.

Soient alors $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ vérifiant $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ Alors :

$$J_{\varepsilon_2}^{y_0}(v) \quad J_{\varepsilon_1}^{y_0}(v) = (\varepsilon_2-\varepsilon_1) \int_{t_0}^{T}|v|^2dt \geq 0 \quad , \quad \forall\ v \in L^2(t_0,T,H)$$

donc : $\quad V_{\varepsilon_1}(y_0,t_0,T) = \operatorname*{Inf}_v J_{\varepsilon_1}^{y_0}(v) \leq J_{\varepsilon_2}^{y_0}(v) \quad , \quad \forall\ v \in L^2(t_0,T;H)$

et donc :

$$V_{\varepsilon_1}(y_0,t_0,T) \leq V_{\varepsilon_2}(y_0,t_0,T) \quad , \quad \forall\ y_0 \in H \quad , \quad \forall\ T \geq t_0$$

Comme on peut passer à la limite lorsque $T \to \infty$, toujours d'après le lemme 7.4 :

$$V_{\varepsilon_1}(y_0) \leq V_{\varepsilon_2}(y_0) \quad \text{ou encore :}$$

$$V_{\varepsilon_2}(y_0) \leq V_{\varepsilon_1}(y_0) \ ,$$

ce qui prouve la croissance de $V_\varepsilon(y_0)$ lorsque ε décroît.

Mais comme $V_\varepsilon(y_0) = (P_\varepsilon y_0, y_0)$, $\forall\ y_0 \in H$, $\forall\ \varepsilon > 0$, avec $P_\varepsilon \in (H;H)$, $P_\varepsilon^* = P_\varepsilon$, $P_\varepsilon \geq 0$, on a que la suite $\{P_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est croissante et majorée lorsque ε décroît vers 0, donc (Riesz-Nagy |21|), il existe un opérateur P positif auto-adjoint de $\mathscr{L}(H;H)$ tel que : $\lim_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon = P$ dans $\mathscr{L}(H;H)$ fort.

Reste à passer à la limite en L_ε

On a $\forall \varepsilon > 0$: $((A^* P_\varepsilon + P_\varepsilon A + \bar{D})h, h) = \| L_\varepsilon h \|^2_H$, $\forall h \in V$;

on peut donc prendre comme $(A^* P_\varepsilon + P_\varepsilon A + \bar{D}) \geq 0$, $H = H$ et

$L_\varepsilon = (ij^{-1} A^* P_\varepsilon j^{-1} i^* + ij^{-1} P_\varepsilon A j^{-1} i^* + \bar{D})^{1/2}$ où i est l'injection

de V dans H, et j l'isomorphisme canonique de V sur V'

Alors, compte tenu du lemme 7.8, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon h = (ij^{-1} A^* P j^{-1} i^* + ij^{-1} P A j^{-1} i^* + \bar{D})^{1/2} h \overset{def}{=} Lh \text{ dans}$$

H fort, $\forall h \in H$.

Finalement, comme $C = B^* P_\varepsilon + W_\varepsilon^* L_\varepsilon$ et comme :

$\forall h, k \in H$: $(W_\varepsilon^* L_\varepsilon h, k) = (L_\varepsilon h, W_\varepsilon k)$, et comme :

$\lim_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon h = Lh$ dans H fort et :

$\lim_{\varepsilon \to 0} W_\varepsilon k = Wk$ dans H fort, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (W_\varepsilon^* L_\varepsilon h, k) = (Lh, Wk) = (W^* Lh, k)$$

Donc $\lim_{\varepsilon \to 0} W_\varepsilon^* L_\varepsilon h = W^* Lh$ dans H faible, $\forall h \in H$.

On a donc : $C = B^* P + W^* L$, ce qui achève de prouver la convergence lorsque $\varepsilon \to 0$, et donc (7.4) est encore vrai lorsque $\bar{M} \geq 0$

Démontrons le lemme 7.8 avant de montrer que (7.4) est une condition suffisante de D-passivité

<u>LEMME 7.8</u> : *Soit* E *un espace de Hilbert séparable et soit* $\{H_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ *une famille d'opérateurs positifs auto-adjoints de* $\mathcal{L}(E;E)$, *telle que* $\lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon = H$ *dans* $\mathcal{L}(E;E)$ *fort. Alors* $\forall h \in E$, *on a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon^{1/2} h = H^{1/2} h \text{ dans } E \text{ fort.}$$

<u>Démonstration</u> : Comme E est séparable, on peut trouver une base

orthonormale dénombrable $\{w_1, \ldots, w_m, \ldots\}$ telle que $\forall\, h \in E$, on ait :

$$h = \sum_{i=1}^{\infty} (h, w_i) w_i \ .$$

Posons $h_m = \sum_{i=1}^{m} (h, w_i) w_i$. On sait alors que $h_m \to h$ dans E fort lorsque $m \to \infty$.

On a : $H_\varepsilon^{1/2} h_m - H^{1/2} h = (H_\varepsilon^{1/2} - H^{1/2}) h_m - H^{1/2}(h - h_m)$.

Et comme, en dimension finie, on sait que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (H_\varepsilon^{1/2} - H^{1/2}) h_m = 0 \text{ dans } E \text{ fort, } \forall\, m \geq 1 \ ,$$

on a : $\lim\limits_{m \to \infty} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \| H_\varepsilon^{1/2} h_m - H^{1/2} h \|_E = 0$, $\forall\, h \in E$.

Mais alors, par définition de la limite, on peut trouver $m_n > 0$ tel que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| H_\varepsilon^{1/2} h_{m_n} - H^{1/2} h \|_E < \frac{1}{2n}$$

et aussi, on peut trouver $\varepsilon_n > 0$ tel que :

$$\| H_{\varepsilon_n}^{1/2} h_{m_n} - H^{1/2} h \|_E \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \| H_\varepsilon^{1/2} h_{m_n} - H^{1/2} h \|_E + \frac{1}{2n}$$

$$< \frac{1}{n} \ ,$$

ceci restant vrai si l'on prend $m_n' \geq m_n$ et $\varepsilon_n' \leq \varepsilon_n$.

on peut donc construire des suites $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{H_{\varepsilon_n}^{1/2} h_{m_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $\lim\limits_{n \to \infty} m_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ et :

$$\lim_{n \to \infty} H_{\varepsilon_n}^{1/2} h_{m_n} = H^{1/2} h \text{ dans } E \text{ fort .}$$

Alors, comme :

$$\| H_{\varepsilon_n}^{1/2} h - H^{1/2} h \|_E \leq \| H_{\varepsilon_n}^{1/2} \|_{\mathcal{L}(E;E)} \| h_{m_n} - h \|_E + \| H_{\varepsilon_n}^{1/2} h_{m_n} - H^{1/2} h \|$$

et comme : $\| H_{\varepsilon_n}^{1/2} \|_{\mathcal{L}(E;E)} \leq c$ compte tenu de la convergence des H_ε , on déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \| H_{\varepsilon_n}^{1/2}h - H^{1/2}h \|_E = 0$$

Mais comme la limite est indépendante de la sous-suite $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, c'est toute la famille qui converge :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon^{1/2}h = H^{1/2}h \text{ dans } E \text{ fort, } \forall\, h \in E, \text{ et le lemme est prouvé}$$

7.5. Démonstration du lemme positif réel. Condition suffisante

La seule chose qu'il reste à montrer pour achever la démonstration du théorème 7.1 est que (7.4) est une condition suffisante pour que le système (7.3) soit D-passif .

Soit donc $\tau \geq 0$ tel que $y(\tau) = 0$. Alors $\forall\, T \geq \tau$ et $\forall\, v \in L^2(\tau,T;H)$, on a :

$$\int_\tau^T 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt = \int_\tau^T \{(\bar{D}y,y)+2(Cy,v)+(\bar{M}v,v)\}dt$$

et comme $C = B^*P + W^*L$:

$$\int_\tau^T 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt = \int_\tau^T \{(\bar{D}y,y)+2(Ly,Wv)_H+2(Py,Bv)+(\bar{M}v,v)\}dt$$

$$= \int_\tau^T \{(\bar{D}y,y)+2(Py,Bv)+2(Ly,Wv)_H+\| Wv\|_H^2\}dt$$

puisque $\bar{M} = W^*W$.

D'autre part, comme $((A^*P+PA+\bar{D})y,y) = \| Ly\|_H^2$, $\forall y \in V$, on a, en ajoutant et retranchant $\| Ly\|_H^2$ dans le membre de droite:

$$\int_\tau^T 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt = \int_\tau^T \{\| Ly+Wv\|_H^2+2(Py,Bv-Ay)\}dt$$

$$= \int_\tau^T \{\| Ly+Wv\|_H^2+2(Py,\frac{dy}{dt})\}dt$$

$$= \int_\tau^T \{\| Ly+Wv\|_H^2+\frac{d}{dt}(Py,y)\}dt$$

$$= \int_\tau^T \| Ly+Wv\|_H^2 dt+(Py(T),y(T)) - (Py(\tau),y(\tau))$$

Et comme $y(\tau) = 0$ et que $P \geq 0$, on a :

$$\int_\tau^T 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt = (Py(T),y(T))+\int_\tau^T \| Ly+Wv\|_H^2 dt \geq 0$$

ce qui achève de prouver le théorème .

7.6. Caractérisations de la D-passivité

On va maintenant donner deux autres caractérisations des systèmes D-passifs qui nous serviront pour la suite: il s'agit des conditions habituellement appelées, en théorie du contrôle, l'inégalité matricielle linéaire et la condition dans le domaine fréquentiel (cf. Willems [23], Brockett [6], Molinari [16]).

THEOREME 7.2.: *Sous les hypothèses du théorème 7.1, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) (7.3) *est* D-*passif*

(ii) $\exists P \in \mathcal{L}(H;H)$, $P^* = P$, $P \geq 0$,*vérifiant l'inégalité matricielle linéaire:*

$$I(P) = \begin{pmatrix} A^*P+PA+\bar{D} & C^*-PB \\ C-B^*P & \bar{M} \end{pmatrix} \geq 0$$

(iii) (condition dans le domaine fréquentiel)

$$H(\bar{s},s)=B^*(\bar{s}I+A^*)^{-1}\bar{D}(sI+A)^{-1}B+C(sI+A)^{-1}B+B^*(\bar{s}I+A^*)^{-1}C^*+\bar{M} \geq 0$$

$\forall \mathrm{Re}\, s \geq 0$ ($\mathrm{Im}\, s \neq 0$ si $\mathrm{Re}\, s = 0$),*où* $\bar{s}$ *est le complexe conjugué de* $s \in \mathbb{C}$, *et où la positivité est prise au sens du produit scalaire de* H *considéré comme Hilbert complexe .*

Démonstration : Montrons d'abord que (i) implique (ii) .

Si (7.3) est D-passif, $\forall\, t_1, t_2$ vérifiant : $t_o \leq t_1 \leq t_2$, on a, d'après (7.5) :

$$\int_{t_1}^{t_2} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt = (Py(t_2),y(t_2))\ (Py(t_1),y(t_1))+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} \| Ly+Wv \|_H^2 dt$$

$$\leq (Py(t_2),y(t_2))-(Py(t_1),y(t_1))$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} 2(Py,\frac{dy}{dt})dt$$

et comme $\frac{dy}{dt} = Ay + Bv \in L^2(t_1,t_2;H)$, on a :

$$\int_{t_1}^{t_2} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt \geq 2\int_{t_1}^{t_2}(Py,-Ay+Bv)dt$$

$$\geq \int_{t_1}^{t_2}\{ -((A^*P+PA)y,y)+2(B^*Py,v)\}dt \;.$$

Donc, en développant (z,v) :

$$\int_{t_1}^{t_2}\{(\bar{D}y,y)+2(Cy,v)+(\bar{M}v,v)\}dt \geq \int_{t_1}^{t_2}\{ -((A^*P+PA)y,y)+2(B^*Py,v)\}dt$$

soit

$$\int_{t_1}^{t_2}\{((A^*P+PA+\bar{D})y,y)+((C^*-PB)v,y)+((C-B^*P)y,v)+(\bar{M}v,v)\}dt \geq 0$$

ou encore :

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\begin{pmatrix} A^*P+PA+\bar{D} & C^*-PB \\ C-B^*P & \bar{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix},\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}\right)dt \geq 0 \;.$$

Soient alors $\eta \in H$, $\xi \in H$ et faisons $v = \eta$, $\forall\, t \in [t_1,t_2]$ et $y(t_1) = \xi$. On a donc :

$$y(t) = \Lambda(t-t_1)\xi + \int_{t_1}^{t} \Lambda(t-s)B\eta ds$$

donc : $\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda(t-t_1) & \int_{t_1}^{t}\Lambda(t-s)Bds \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$.

Posons alors :

$$R(t)=\begin{pmatrix} \Lambda^*(t-t_1) & 0 \\ \int_{t_1}^{t} B^*\Lambda^*(t-s)ds & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^*P+PA+\bar{D} & C^*-PB \\ C-B^*P & \bar{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Lambda(t-t_1) & \int_{t_1}^{t}\Lambda(t-s)Bds \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

On a : $\int_{t_1}^{t_2}(R(t)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix})dt \geq 0 \quad \forall\, t_1 \in [t_o,t_2]$.

Donc :

$$\int_{t_1}^{t_3}(R(t)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix})dt-\int_{t_1}^{t_2}(R(t)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix})dt=\int_{t_2}^{t_3}(R(t)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix})dt \geq 0$$

$\forall\, t_o \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$, ce qui prouve que $t \longmapsto \int_{t_1}^{t} R(s)ds$ est une

application non décroissante de $[t_0,\infty[$ dans $\mathcal{L}(H\times H;H\times H)$.
Elle admet donc une dérivée presque partout positive :

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{t_1}^{t} R(s)ds\right)\Big|_{t=t_1} = R(t_1) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^*P+PA+\bar{D} & C^*-PB \\ C-B^*P & \bar{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \geq 0$$

p.p. $t_1 \in [t_0,\infty[$,et donc $I(P) \geq 0$, ce qui prouve (ii) .

Montrons que (ii) implique (iii) .

Soit $s = \sigma+j\omega$, avec $j = \sqrt{-1}$, un nombre complexe tel que $\sigma \geq 0$ et $\omega \neq 0$ si $\sigma = 0$ .Comme A est supposé λ-coercif, on sait (Lions |14|) que pour $\sigma \geq 0, \omega \neq 0$ si $\sigma = 0$, la résolvante $(sI+A)^{-1}$ existe et est continue.

Ecrivons alors I(P) sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} (\bar{s}I+A^*)P+P(sI+A)+\bar{D} & C^*-PB \\ C-B^*P & \bar{M} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\sigma P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

En multipliant chaque terme à droite par : $\begin{pmatrix} (sI+A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix}$ et à gauche par $(B^*(\bar{s}I+A^*)^{-1} , I)$ on conserve l'inégalité et on obtient

$$H(\bar{s},s) = B^*(\bar{s}I+A^*)^{-1}\bar{D}(sI+A)^{-1}B + C(sI+A)^{-1}B + B^*(\bar{s}I+A^*)^{-1}C^* + \bar{M}$$
$$\geq 2\sigma B^*(\bar{s}I+A^*)^{-1}P(sI+A)^{-1}B \geq 0 \text{ puisque } \sigma \geq 0 \text{ , d'où (iii) .}$$

Finalement, montrons que (iii) implique (i) .

Soit donc s tel que $\mathrm{Re}\,s \geq 0, \mathrm{Im}\,s \neq 0$ si $\mathrm{Re}\,s = 0$.

Soient τ et T tels que $y(\tau) = 0$ et $T \geq \tau \geq 0$, et soit $v \in L^2(\tau,T;H)$. L'état y correspondant à v est solution de :

$$\frac{dy}{dt} + Ay = Bv \quad , \quad y(\tau) = 0 \text{ .}$$

En prolongeant v et y par 0 en dehors de $[\tau,T]$, comme y et v sont des distributions tempérées, leur transformée de Fourier existe :

$$\hat{y}(j\omega) = (j\omega I+A)^{-1}B\hat{v}(j\omega) \quad , \quad \omega \neq 0 \text{ .}$$

De même, en prolongeant $z = Cy + Mv$ par 0 en dehors de $[\tau,T]$, on a : $\hat{z}(j\omega) = Cy(j\omega) + M\hat{v}(j\omega)$, $\omega \neq 0$.

Alors, utilisant le théorème de Parseval :

$$2\pi\int_{\tau}^{T} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\{(D\hat{y}(j\omega),\hat{y}(j\omega))+(\hat{z}(j\omega),\hat{v}(j\omega))\}d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\{(\bar{D}(j\omega I+A)^{-1}B\hat{v}(j\omega),(j\omega I+A)^{-1}B\hat{v}(j\omega))+2(C(j\omega I+A)^{-1}B\hat{v}(j\omega),\hat{v}(j\omega))$$

$$+(\bar{M}\hat{v}(j\omega),\hat{v}(j\omega))\}d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\{((B^{*}(-j\omega I+A^{*})^{-1}\bar{D}(j\omega I+A)^{-1}B+C(j\omega I+A)^{-1}B+B^{*}(\ j\omega I+A^{*})^{-1}C^{*}+\bar{M})$$

$$\cdot\hat{v}(j\omega),\hat{v}(j\omega))\}d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(H(\ j\omega,j\omega)\hat{v}(j\omega),\hat{v}(j\omega))d\omega \geq 0$$ d'où la D-passivité.

<u>Remarque</u> : En dimension finie et pour des systèmes régis par des équations différentielles ordinaires, Willems [23] a montré que (ii) équivaut à (iii) et que, lorsque $\bar{M}$ était inversible ($\bar{M} > 0$), ces derniers étaient équivalents à l'existence d'un opérateur P solution de l'équation de Riccati algébrique :

$$(7.14) \qquad A^{*}P + PA + \bar{D} \quad (C-B^{*}P)^{*}\bar{M}^{-1}(C-B^{*}P) = 0 .$$

Or ce fait découle de la D-passivité lorsque $\bar{M}$ est inversible, puisqu'alors la relation $C = W^{*}L + B^{*}P$ s'écrit (pour $W=W^{*}=\bar{M}^{1/2}$) : $L = W^{*-1}(C-B^{*}P)$ et en combinant avec : $A^{*}P+PA+\bar{D} = L^{*}L$, on obtient (7.14).

Dans le même cadre que Willems, Molinari [16] a montré que (i) équivaut à (ii).

Dans le cadre de la réalisation markovienne, Faurre [8] a montré que (i) équivaut à (iii) puisque H(s,s) représente alors le spectre de la covariance de l'état y

On va maintenant s'intéresser à l'ordre sur l'ensemble des opérateurs P vérifiant (7.4).

8. REALISATION MINIMALE

8.1. Réalisation minimale.

Définition 8.1.: On appelle réalisation du système (7.3) l'opérateur P du triplet (P,L,W) vérifiant (7.4).

On a conservé le terme de réalisation par analogie avec la réalisation markovienne dont on a parlé précédemment.

On a alors :

THEOREME 8.1.: *Sous les hypothèses du théorème (7.1), il existe une réalisation minimale* P_{min} *au sens suivant :*

$$(P_{min}h,h) \leq (Ph,h) \quad , \quad \forall\, h \in H$$

pour toute réalisation P *de (7.3).*

De plus, P_{min} *est donné par :*

$$(8.1) \qquad (P_{min}y_o,y_o) = \lim_{T\to\infty} \ \operatorname*{Inf}_{v\in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt \ .$$

Démonstration : Soient P_1 et P_2 deux réalisations de (7.3). Alors on peut trouver L_1,W_1 et L_2,W_2 tels que (P_i,L_i,W_i) vérifie (7.4), $i = 1,2$, et, d'après (7.5) :

$$(8.2) \quad \int_{t_1}^{t_2} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt = (P_1y(t_2),y(t_2))-(P_1y(t_1),y(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \|L_1y+W_1v\|^2_{H_1}dt$$

$$= (P_2y(t_2),y(t_2))-(P_2y(t_1),y(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \|L_2y+W_2v\|^2_{H_2}dt$$

pour tous t_1,t_2 tels que $t_o \leq t_1 \leq t_2$.

Soit alors : $(P_1y_o,y_o) = -\lim_{T\to\infty} \operatorname*{Inf}_{v\in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$

On peut construire une suite minimisante $\{u_n,T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$(P_1 y_o, y_o) = -\lim_{n\to\infty} \int_{t_o}^{T_n} 2\{(Dy_n, y_n) + (z_n, u_n)\}dt$ où y_n (resp. z_n) est l'état (resp. la sortie) correspondant à u_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Posons : $V_i(y) = (P_i y, y)$, $i = 1,2$ et :

$$Y_i^n = L_i y_n + W_i u_n \quad , \quad \forall\, n \in N \quad , \quad i = 1,2.$$

D'après (8.2) pour tout $t_1 = t_o$ et $t_2 = T_n$, on a :

$$(8.3) \quad V_1(y_n(T_n)) - V_1(y_o) + \int_{t_o}^{T_n} \| Y_1^n \|^2_{H_1} dt = V_2(y_n(T_n)) - V_2(y_o) + \int_{t_o}^{T_n} \| Y_2^n \|^2_{H_2} dt \,.$$

Or on a :

$$\begin{aligned} V_1(y_o) &= \lim_{n\to\infty} \int_{t_o}^{T_n} 2\{(Dy_n, y_n) + (z_n, u_n)\}dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \{V_1(y_n(T_n)) \quad V_1(y_o) + \int_{t_o}^{T_n} \| Y_1^n \|^2_{H_1} dt\} \end{aligned}$$

donc : $\lim_{n\to\infty} \{V_1(y_n(T_n)) + \int_{t_o}^{T_n} \| Y_1^n \|^2_{H_1} dt\} = 0$

et, d'après (8.3) :

$$V_1(y_o) = V_2(y_o) + \lim_{n\to\infty}\{V_2(y_n(T_n)) + \int_{t_o}^{T_n} \| Y_2^n \|^2_{H_2} dt\}$$

soit :

$$V_2(y_o) - V_1(y_o) = \lim_{n\to\infty}\{V_2(y_n(T_n)) + \int_{t_o}^{T_n} \| Y_2^n \|^2_{H_2} dt\} \geq 0$$

et donc $V_2(y_o) = (P_2 y_o, y_o) \geq V_1(y_o) = (P_1 y_o, y_o)$, $\forall\, y_o \in H$,

ceci ayant lieu pour toute réalisation P_2 de (7.3), donc $P_1 \equiv P_{mi}$

8.2. <u>Convexité de l'ensemble des réalisations</u>

On a le résultat supplémentaire sur l'ensemble $\mathcal{R}$ des réalisations de (7.3) :

<u>THEOREME 8.2.</u> : Sous les hypothèses précédentes, l'ensemble R des réalisations de (7.3) est convexe et borné inférieurement.

<u>Démonstration</u> : Le fait que R soit borné inférieurement découle du théorème 8.1 Montrons que R est convexe.

Soient P_1 et P_2 dans R, c'est-à-dire que (P_1, L_1, W_1) et (P_2, L_2, W_2) vérifient (7.4), et soit $\lambda \in [0,1]$.

Posons : $\hat{P} = \lambda P_1 + (1 \ \lambda) P_2$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda}\ L_1 \\ \sqrt{1 \ \lambda}\ L_2 \end{pmatrix} \quad , \qquad \hat{W} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda}\ W_1 \\ \sqrt{1 \ \lambda}\ W_2 \end{pmatrix}$$

On a : $\hat{P} \in \mathscr{L}(H;H)$, $\hat{P}^* = \hat{P}$, $\hat{P} \geq 0$,

$\hat{L} \in \mathscr{L}(H;H_1 \times H_2)$, $\hat{W} \in \mathscr{L}(H;H_1 \times H_2)$.

Montrons que $(\hat{P},\hat{L},\hat{W})$ vérifie (7.4):

on a : $W^*W = \lambda W_1^* W_1 + (1 \ \lambda) W_2^* W_2 = \lambda \bar{M} + (1 \ \lambda)\bar{M} = \bar{M}$

$\hat{L}^*\hat{L} = \lambda L_1^* L_1 + (1-\lambda) L_2^* L_2 = \lambda(A^*P_1 + P_1 A + \bar{D}) + (1 \ \lambda)(A^*P_2 + P_2 A + \bar{D}) = A^*P + PA + \bar{D}$

$\hat{W}^* L = \lambda W_1^* L_1 + (1 \ \lambda) W_2^* L_2 = \lambda(C - B^*P_1) + (1 \ \lambda)(C - B^*P_2) = C - B^*\hat{P}$

Donc $(\hat{P},\hat{L},\hat{W})$ vérifie bien (7.4) et $\hat{P} \in R$, donc R est convexe

Dans le chapitre suivant, on va montrer que R est aussi borné supérieurement, avec une hypothèse supplémentaire

9. REALISATION MAXIMALE

Dans ce chapitre, on fait l'hypothèse supplémentaire :

(9.1) $\begin{cases} A \text{ est générateur infinitésimal d'un groupe } \{\Lambda(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ \text{fortement continu} \end{cases}$

On a alors :

THEOREME 9.1.: *Sous les hypothèses du théorème 7.1 avec (9.1), il existe une réalisation maximale* P_{max} :

$(P_{max}h,h) \geq (Ph,h) \quad \forall\, h \in H\ ,\ \forall\, P \in \mathcal{R}$ et

$$(9.2) \quad (P_{max}y_o,y_o) = \lim_{\tau \to -\infty} \ \inf_{v \in L^2(\tau,t_o;H)} \int_\tau^{t_o} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$$

Démonstration : Il faut d'abord vérifier que P_{max} défini par (9.2) est bien un élément de $\mathcal{R}$. On procède de la même manière que pour P_{min} : on a d'abord, par D-passivité :

$\int_\tau^{t_o} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt \geq 0\ ,\ \forall\, v \in L^2(\tau,t_o;H)$ où τ est tel que :

$y(\tau) = 0\ ,\ \tau \leq 0$. Donc $\inf_{v \in L^2(\tau,t_o;H)} \int_\tau^{t_o} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt \geq 0$

$(y(t_o) = y_o)$ et par rétro-commandabilité, $\exists\, \bar{\tau} \in [0,t_o[$ et u^* tels que $y(\tau) = 0\ ,\ y^*(t_o) = y_o$

$$\text{Alors : } \inf_{v \in L^2(\tau,t_o;H)} \int_\tau^{t_o} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt \leq \int_\tau^{t_o} 2\{(Dy^*,y^*)+(z^*,u^*)\}dt \leq \rho|y_o|^2$$

et ceci $\forall\, \tau \leq 0$ $(\tau=-\infty$ éventuellement). Ceci prouve donc l'équivalent du lemme 7.3.

Le lemme 7.4 s'adapte facilement à notre situation et on a :

$\exists P \in \mathcal{L}(H;H)$, $P^* = P$, $P \geq 0$ tel que :

$$(Py_o,y_o) = \underset{v\in L^2(-\infty,t_o;H)}{\mathrm{Inf}} \int_{-\infty}^{t_o} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$$

$$= \lim_{\tau\to-\infty} \underset{v\in L^2(\tau,t_o;H)}{\mathrm{Inf}} \int_{\tau}^{t_o} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$$

et $\|P\|_{\mathcal{L}(H;H)} \leq \rho$.

Le lemme 7.5 s'adapte aussi aisément et on en conclut que

$$(P_\tau(t_o)y_o,y_o) = \underset{v\in L^2(\tau,t_o;H)}{\mathrm{Inf}} \int_{\tau}^{t_o} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$$

définit un opérateur $P_\tau(t)$ différentiable presque partout dans $[\tau,t_o]$ par rapport à t.

Pour ce qui est du lemme 7.6, il faut remplacer (7.11) par :

$(P_\tau(t_2)h,h) \leq \int_{t_1}^{t_2} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt+(P_\tau(t_1)h,h)$, avec

$t_1 \leq t_2 \leq t_o$ et $\forall\, v \in L^2(t_1,t_2;H)$ tel que v transfère l'état de $y(t_1) = h$ à $y(t_2) = h$.

Il vient alors, lorsque $t_1 \to t_2$:

$$(\frac{dP}{dt}\tau(t_2)h,h)+2(P_\tau(t_2)h,Ah-Bv)+(\bar{D}h,h)+2(Ch,v)+(\bar{M}v,v) \geq 0$$

$\forall\, v \in H$, p.p. $t_2 \in [\tau,t_o]$, $\forall\, h \in V$,

compte tenu du fait que, en temps rétrograde, l'état est donné par
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(-t) - Ay(-t) = Bv(-t) & t \leq t_o \\ y(t_o) = y_o . \end{cases}$$

Tous les calculs qui suivent s'adaptent alors jusqu'à la démonstration du théorème 7.1, où l'on doit vérifier que :

$V_\varepsilon(y_o,t_o,\tau) = (P_\tau(t_o)y_o,y_o)$ est bornée indépendamment de ε :

$$0 \leq V_\varepsilon(y_o,t_o,\tau) = \int_\tau^{t_o} 2\{(Dy_\varepsilon,y_\varepsilon)+(Cy_\varepsilon+Mu_\varepsilon,u_\varepsilon)\}dt+\frac{\varepsilon}{2}\int_\tau^{t_o}|u_\varepsilon|^2dt$$

$$\leq \int_\tau^{t_o} 2\{(Dy,y)+(Cy+Mv,v)\}dt+\frac{\varepsilon}{2}\int_\tau^{t_o}|v|^2dt \quad , \quad \forall\, v \in L^2(\tau,t_o;H)$$

tel que v transfère l'état de $y(\tau) = 0$ à $y(t_o) = y_o$.

Donc en particulier, si $\varepsilon \leq 1$:

$$0 \leq V_\varepsilon(y_o,t_o,\tau) \leq \int_\tau^{t_o} 2\{(Dy^*,y^*)+(Cy^*+Mu^*,u^*)\}dt+\int_\tau^{t_o}|u^*|^2dt$$

$$\leq \rho'|y_o|^2 \ .$$

La fin de la démonstration s'adapte alors parfaitement à condition de remplacer : "$V_\varepsilon(y_o)$ croît lorsque ε décroît" par : "$V_\varepsilon(y_o)$ décroît lorsque ε décroît".

Alors P défini par $(Py_o,y_o) = \displaystyle\inf_{\substack{v\in L^2(-\infty,t_o;H)\\ y(t_o)=y_o}} \int_{-\infty}^{t_o} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$

vérifie (7.4) et donc : $P \in \mathcal{R}$.

Reste à montrer que ce P est maximal.

Soient donc (P_1,L_1,W_1) et (P_2,L_2,W_2) vérifiant (7.4).

On a, avec $y(\tau) = 0$ et $y(t_o) = y_o$:

(9.3) $(P_1y_o,y_o)+\int_\tau^{t_o}\|L_1y+W_1v\|^2_{H_1}dt=(P_2y_o,y_o)+\int_\tau^{t_o}\|L_2y+W_2v\|^2_{H_2}dt$

$\forall\, v \in L^2(\tau,t_o;H)$.

Soit $(\bar{P}_1y_o,y_o)= \displaystyle\lim_{\tau\to-\infty} \inf_{v\in L^2(\tau,t_o;H)} \int_\tau^{t_o} 2\{(Dy,y)+(z,v)\}dt$

On peut construire une suite minimisante $\{u_n,\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$(P_1y_o,y_o) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\tau_n}^{t_o} 2\{(Dy_n,y_n)+(z_n,u_n)\}dt$ avec les notations habituelles.

Et comme :

$$\int_{\tau_n}^{t_o} 2\{(Dy_n,y_n)+(z_n,v_n)\}dt=(P_1y_o,y_o)+\int_{\tau_n}^{t_o}\|L_1y_n+W_1u_n\|^2_{H_1}dt$$

on a : $\lim_{n\to\infty} \int_{\tau_n}^{t_o} \| L_1 y_n + W_1 u_n \|_{H_1}^2 dt = 0$

Donc, avec (9.3) :

$$(P_1 y_o, y_o) = (P_2 y_o, y_o) + \lim_{n\to\infty} \int_{\tau_n}^{t_o} \| L_2 y + W_2 u_n \|_{H_2}^2 dt \geq (P_2 y_o, y_o)$$

et donc $P_1 \equiv P_{max}$.

On va maintenant montrer comment la passivité intervient dans les problèmes de point-selle en horizon infini .

10. D-PASSIVITE ET POINT-SELLE

10.1 Position du problème

On fait les hypothèses suivantes :

(10.1) A : λ-coercif et $D_1 \geq 0$ $(D_1 = B_1 N_1^{-1} B_1^* \quad B_2 N_2^{-1} B_2^*)$

On considère le système :

$$(10.2)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = D_1^{1/2} v \quad , \quad y(t_o) = y_o \quad , \quad t_o > 0 \\ z = \frac{1}{2} v \end{cases}$$

(10.3) Le système (10.2) est supposé rétro-commandable

(10.4) $D_2 \in \mathcal{L}(H;H)$, $D_2 \leq 0$, on note $\bar{D}_2 = D_2 + D_2^*$.

On a vu au chapitre 5 que si :

. A est générateur d'un semi-groupe fortement continu;

. $C \in \mathcal{L}(H;F)$, $D_2 = C^*C$ et le couple (C,A) est détectable;

. $D_1 \geq 0$ et le couple $(A, D_1^{1/2})$ est stabilisable;

le problème de minimisation :

$$(P_1)\quad \begin{cases} \text{Minimiser } J(v) : \int_{t_o}^{\infty} \{(D_2 y,y) + |V|^2\}dt \quad \text{dans } L^2(t_o,\infty;H) \\ \text{sous la contrainte : } \dfrac{dy}{dt} + Ay = D_1^{1/2} v \quad , \quad y(t_o) = y_o \end{cases}$$

a une unique solution $u = D_1^{1/2} Py$, où l'opérateur

$P \in \mathcal{L}(H;H)$, $P^* = P$, $P \geq 0$ est solution de l'équation de Riccati algébrique :

$(A^*P + PA + PD_1 P)h = D_2 H \quad , \quad \forall\, h \in V$.

Il a de plus la propriété :

$u_1 = N_1^{-1} B_1^* Py$, $u_2 = N_2^{-1} B_2^* Py$ est solution du problème :

$$(P_2)\quad \begin{cases} \text{trouver un point-selle dans } L^2(t_o,\infty;E_1) \times L^2(t_o,\infty;E_2) \text{ de :} \\ J(v_1,v_2) = \int_{t_o}^{\infty} \{(D_2 y,y) + (N_1 v_1,v_1)_{E_1} \quad (N_2 v_2,v_2)_{E_2}\}dt \text{ sous la} \\ \text{contrainte : } \dfrac{dy}{dt} + Ay = B_1 v_1 + B_2 v_2 \quad , \quad y(t_o) = y_o \end{cases}$$

Le résultat que l'on va établir ici, concerne le cas $D_2 \leq 0$, cas opposé à celui du chapitre 5. Comme on va utiliser les solutions négatives de l'équation de Riccati, des problèmes de stabilité vont se poser Le résultat sera donc moins général.

10.2. L'équation de Riccati. Solutions négatives.

THEOREME 10.1 : Sous les hypothèses (10.1) à (10.4), les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) (10.2) est D_2-passif

(ii) Il existe au moins une solution $P \in \mathcal{L}(H;H), P^* = P, P \geq 0$, de l'inégalité matricielle linéaire :

$$\begin{pmatrix} A^*P + PA + \bar{D}_2 & PD_1^{1/2} \\ D_1^{1/2}P & I \end{pmatrix} \geq 0$$

(iii) $I + D_1^{1/2}(sI+A^*)^{-1}\bar{D}_2(sI+A)^{-1}D_1^{1/2} \geq 0 \ \forall \mathrm{Re}\, s \geq 0, \mathrm{Im}\, s \neq 0$ si $\mathrm{Re}\, s = 0$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du théorème 7.2

THEOREME 10.2 : Si $D_1 \geq 0$ et :
$I + D_1^{1/2}(sI+A^*)^{-1}\bar{D}_2(sI+A)^{-1}D_1^{1/2} \geq 0 \quad \forall \mathrm{Re}\, s \geq 0, \mathrm{Im}\, s \neq 0$ si $\mathrm{Re}\, s = 0$,
il existe P tel que :

$$(10.5) \quad \begin{cases} P \in \mathcal{L}(H;H) \ , \ P^* = P \ , \ P \leq 0 \\ (A^*P + PA + PD_1P)h = \bar{D}_2 h \ , \ \forall h \in V . \end{cases}$$

Démonstration : Comme la condition (iii) dans le domaine fréquentiel équivaut à la D-passivité de (10.2), grâce au lemme positif réel, il existe un triplet (Q,L,W) vérifiant :

$$(10.6) \quad \begin{cases} (A^*Q + QA + \bar{D}_2)h = L^*Lh \ , \ \forall h \in V . \\ Q^* = Q \ , \ Q \geq 0 \\ W^*W = I \ , \quad 0 = D_1^{1/2}Q + W^*L \end{cases}$$

donc $W^*L = \quad D_1^{1/2}Q$ et $L^*L = L^*W^*WL = QD_1Q$.

En reportant L^*L dans la première relation de (10.6), on obtient :

$$\begin{cases} (A^*Q + QA \quad QD_1Q + \bar{D}_2)h = 0 \quad , \forall\, h \in V \\ Q^* = Q \quad , \quad Q \geq 0 \ . \end{cases}$$

Alors si l'on définit P par : $P = \quad Q$, P vérifie :

$$\begin{cases} (A^*P + PA + PD_1P)h = \bar{D}_2h \quad , \quad \forall\, h \in V \\ P^* = P \ , \ P \leq 0 \ , \end{cases}$$

d'où le résultat.

10.3. Existence de point-selle

THEOREME 10.3 : Sous les hypothèses du théorème 10.2 et si, de plus, l'opérateur P vérifie :

$$(10.7) \begin{cases} \textit{le semi-groupe } \{\Lambda_P(t) | t \in R_+\} \textit{ engendré par } A+D_1P \textit{ est} \\ \textit{fortement stable : } \lim\limits_{t\to\infty} |\Lambda_P(t)h| = 0 \quad \forall\, h \in H \ . \end{cases}$$

Alors le couple (u_1, u_2) *défini par :*

$$u_1 = - N_1^{-1} B_1^* Py \quad , \quad u_2 = N_2^{-1} B_2^* Py$$

est un point-selle en boucle fermée pour la fonctionnelle :

$$J(v_1, v_2) = \int_{t_0}^{\infty} \{(\bar{D}_2y, y) + (N_1v_1, v_1) \quad (N_2v_2, v_2)\}dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = B_1v_1 + B_2v_2 \quad , \quad y(t_0) = y_0 \\ (u_1, u_2) \in L^2{}_{loc}(t_0, \infty; E_1) \times L^2{}_{loc}(t_0, \infty; E_2) \ . \end{cases}$$

Démonstration : Soit à minimiser la fonctionnelle :

$$J(v) = \int_{t_0}^{\infty} \{(\bar{D}_2y, y) + |v|^2\}dt \ .$$

Cherchons le minimum sous la forme : $w = v + D_1^{1/2}Py$.

L'état du système est alors :

$$\frac{dy}{dt} + Ay = D_1^{1/2}w - D_1Py \quad , \quad y(t_0) = y_0 \ ,$$

ou encore :

$$(10.8)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + (A + D_1P)y = D_1^{1/2}w \\ y(t_o) = y_o \ . \end{cases}$$

Soit alors $t_1 > t_o$. On a :

$$\int_{t_o}^{t_1} \{(\bar{D}_2y,y) + |v|^2\}dt = \int_{t_o}^{t_1} \{(\bar{D}_2y,y) + |w-D_1^{1/2}Py|^2\}dt$$

$$= \int_{t_o}^{t_1} \{(\bar{D}_2y,y) + (PD_1Py,y) \quad 2(Py,D_1^{1/2}w) + |w|^2\}dt$$

$$= \int_{t_o}^{t_1} \{((A^*P + PA + PD_1P)y,y) + (PD_1Py,y) \quad 2(Py,D_1^{1/2}w) + |w|^2\}dt$$

(puisque P vérifie (10.5))

$$= \int_{t_o}^{t_1} \{2(Py,(A + D_1P)y) \quad 2(Py,D_1^{1/2}w) + |w|^2\}dt$$

$$= \int_{t_o}^{t_1} \{-2(Py,\frac{dy}{dt}) + |w|^2\}dt \quad \text{(puisque y vérifie (10.8))}$$

$$= (Py_o,y_o) \quad (Py(t_1),y(t_1)) + \int_{t_o}^{t_1} |w|^2dt$$

Alors, comme $P \leq 0$, et comme $\lim\limits_{t_1\to\infty} |\Lambda_P(t_1)y_o| = 0$, on a :

$$\operatorname*{Inf}_v \ (\lim_{t_1\to\infty} \int_{t_o}^{t_1} \{(\bar{D}_2y,y)+|v|^2\}dt) = (Py_o,y_o)+\operatorname*{Inf}_w(\lim_{t_1\to\infty}\{ \int_{t_o}^{t_1} |w|^2dt$$

$$(Py(t_1),y(t_1))\})$$

$$= (Py_o,y_o) \ ,$$

et donc l'infimum est réalisé pour $w = 0$, ou : $v = D_1^{1/2}Py$, et en outre : $(Py_o,y_o) = \int_{t_o}^{\infty} \{(\bar{D}_2y,y) + (PD_1Py,y)\}dt$.

Utilisant alors Bensoussan [2], le couple (u_1,u_2) défini par $u_1 = N_1^{-1}B_1^*Py$, $u_2 = N_2^{-1}B_2^*Py$ est un point-selle en boucle fermée dans $L^2_{loc}(t_o;\infty;E_1)\times L^2_{loc}(t_o,\infty;E_2)$ pour $J(v_1,v_2)$, ce qui prouve le théorème.

Remarque 10.1 : L'importance de la passivité réside essentiellement dans le fait qu'elle affirme l'existence d'une solution de l'équation de Riccati stationnaire (ou algébrique). Cette observation sera largement exploitée dans la suite.

Remarque 10.2 : La caractérisation de la propriété (10.7) ne semble pas aisée Evidemment, si A est V-elliptique :

$$(Ay,y) \geq \alpha \| y \|^2 \quad , \quad \forall\, y \in V \; ,$$

il suffit que :

(10.9) $\quad \alpha \quad \| i \|^2 \| D_1 P \| \geq \varepsilon > 0$ (i: injection de V dans H) .

En effet, si (10.9) est vérifiée, on a :

$$(Ay,y) \quad \| D_1 P \| \quad |y|^2 \geq \varepsilon \| y \|^2 \quad , \quad \forall\, y \in V \; ,$$

et donc :

$(Ay,y) + (D_1 Py,y) \geq (Ay,y) \quad \| D_1 P \| \quad |y|^2 \geq \varepsilon \| y \|^2$

soit : $A + D_1 P$ est V-elliptique et le semi-groupe Λ_P est L^2 stable. Cependant (10.9) n'est qu'une condition suffisante basée sur la connaissance de $\| P \|$, et non directement calculable en fonction des données.

En particulier, on peut se demander si, comme en dimension finie (Willems [23]), il existe une solution de (10.5) vérifiant (10.7) Dans notre cas, le problème semble ouvert.

10.4. Exemple

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, de frontière Γ régulière

On prend $V = H_o^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$. L'état est donné par :

$$(10.10) \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} \quad \Delta y = b_1 v_1 + b_2 v_2 \text{ dans } Q = \Omega \times]t_o,\infty[\\ y_{|\Sigma} = 0 \quad \text{où } \Sigma = \Gamma \times]t_o,\infty[\\ y(t_o) = y_o \in V \end{cases}$$

où b_1 et b_2 sont des réels donnés (on a pris : $B_k = b_k I$, $k=1,2$).

Soient $\delta \geq 0$, $n_1 > 0$ et $n_2 > 0$, trois réels.

Posons : $\bar{D}_2 = \quad \delta I$, $N_1 = n_1 I$, $N_2 = n_2 I$,

$D_1 = d_1 I$, où $d_1 = \frac{b_1}{n_1} \quad \frac{b_2}{n_2}$ est supposé ≥ 0 .

La fonction coût est donnée par :

$$J(v_1,v_2) = \int_{t_0}^{\infty} \{-\delta|y|^2+n_1|v_1|^2-n_2|v_2|^2\}dt \ .$$

Pour appliquer le théorème 10.3, il faut vérifier

1) que le système :

$$(10.11)\quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} \quad \Delta y = \sqrt{d_1}\,v \quad , \quad y_{|\Sigma} = 0 \quad , \quad y(t_o) = y_o \\ z = \frac{1}{2}v \end{cases}$$

est rétro-commandable (pour t_o suffisamment petit et pour $d_1 > 0$)

2) que (10.11) est D_2-passif, ou de manière équivalente, que l'inégalité dans le domaine fréquentiel est vérifiée :

$$(10.12)\quad I \quad \delta d_1 (sI-\Delta)^{-1}(sI-\Delta)^{-1} \geq 0 \quad , \quad \forall\ \mathrm{Re}\,s \geq 0$$

3) qu'il existe, pour δ suffisamment petit, une solution P_δ de l'équation de Riccati telle que $(A+d_1P_\delta)$ engendre un semi groupe fortement stable.

Dans ce cas, on sera assuré de l'existence d'un point-selle donné par :

$u_1 = \quad \frac{b_1}{n_1} P_\delta y \quad , \quad u_2 = \frac{b_2}{n_2} P_\delta y$, où P_δ est donné par le 3).

. Vérifions le 1)

Remarquons d'abord que le semi-groupe $\{\Lambda(t) | t \in \mathbb{R}_+\}$ est fortement continu à l'origine et que $\Lambda(0) = I$. On peut donc trouver un voisinage $[0,\eta[$ à l'intérieur duquel $\Lambda(t)$ est inversibl Donc, si $t_o \in \,]0,\eta[$ et si $\tau \in [0,t_o[$, $\Lambda^{-1}(t_o)$ existe, est continu et l'expression :

$h = \frac{1}{t_o-\tau} \Lambda^{-1}(t_o)y_o$ a bien un sens.

Posons alors $u^*(s) = \frac{1}{\sqrt{d_1}}\Lambda(s)h$. Il est clair que u^* réalise le transfert de $y(\tau) = 0$ à :

$$y(t_o) = \int_\tau^{t_o} \Lambda(t_o-s)\sqrt{d_1}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}\Lambda(s)h\right)ds = \frac{1}{t_o-\tau}\int_\tau^{t_o}\Lambda(t_o\ s)\Lambda(s)\Lambda^{-1}(t_o)y_o ds$$

$= y_o$, d'où la rétro-commandabilité.

. Pour le numéro 2), montrons que si :

(10.1 3) $\quad d_1 \leq \frac{1}{\delta \| i \|^2_{\mathcal{L}(V;H)}}$ où i est l'injection de V dans H.

alors (10.12) a lieu :

on sait que $\|(sI-\Delta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H,V)} \leq \|i\|_{\mathcal{L}(V;H)}$. En effet,

$\forall$ Res ≥ 0, $\forall f \in H$, la solution $u \in V$ de :

$$\begin{cases} (sI-\Delta)u = f \text{ dans } \Omega \\ u_{|\Gamma} = 0 \end{cases}$$

vérifie : $\|u\|^2 = \|(sI-\Delta)^{-1}f\|^2 \leq |f| \ \|i\| \ \|u\|$,

soit : $\|(sI-\Delta)^{-1}\| \leq \|i\|$, $\forall$ Res ≥ 0 .

Donc, si $d_1 \leq \frac{1}{\delta\|i\|^2}$, on a : $\delta d_1 \|i\|^2 |v|^2 \leq |v|^2$, $\forall v \in H$,

ou encore : $\delta d_1 \|(sI-\Delta)^{-1}v\|^2 \leq |v|^2$, $\forall v \in H$, $\forall$ Res ≥ 0 ,

soit : $\delta d_1 (\bar{s}I-\Delta)^{-1}(sI-\Delta)^{-1} \leq I$, ce qui prouve (10.12) .

. Voyons maintenant le 3). D'après (10.1 3) et la rétro-commanda bilité, on sait par le théorème 10.2 qu'il existe :

$$(10.14)\quad \begin{cases} P \in \mathcal{L}(H;H) \quad , \quad P^* = P \; , \; P \leq 0 \\ (-\Delta P - P\Delta + d_1 P^2)h = \quad \delta h \quad , \quad \forall\, h \in V \end{cases}$$

On voit facilement que si $\delta = 0$, $P = 0$ est une solution admissible et, comme l'opérateur $-\Delta$ engendre un semi-groupe L^2-stable, le système bouclé

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} \quad \Delta y = 0 \\ y(t_o) = y_o \quad , \quad y_{|\Sigma} = 0 \end{cases}$$

est trivialement L^2-stable, de sorte que :

$u_1 = 0$, $u_2 = 0$ est un point-selle de $J(v_1, v_2)$.

Pour le cas où $\delta \leq 0$, voir le chapitre 5.

On va montrer que lorsque δ varie, P_δ varie continuement et donc que l'on peut trouver δ suffisamment petit tel que le systèm

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} \quad \Delta y + d_1 P_\delta y = 0 \\ y(t_o) = y_o \\ y_{|\Sigma} = 0 \qquad \text{soit stable.} \end{cases}$$

On va montrer que l'application : $\delta \longrightarrow P_\delta$ est fortement continue de $R \rightarrow \mathcal{L}(H;H)$

Soit donc une suite $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\delta_n \geq 0$, $\delta_{n_1} \leq \delta_{n_2}$ si $n_1 \leq n_2$, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

Montrons que pour

$$(P_{\delta_n} y_o, y_o) = \lim_{T\to\infty} \; \operatorname*{Inf}_{v \in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} \{ \; \delta_n |y|^2 + |v|^2 \} dt$$

on a : $\delta_{n_1} \leq \delta_{n_2}$ implique $P_{\delta_{n_2}} \leq P_{\delta_{n_1}}$

Remarquons alors que si $\delta_{n_1} \leq \delta_{n_2}$, on a :

$$\int_{t_o}^{T} \delta_{n_2} |y|^2 dt \leq \int_{t_o}^{T} \delta_{n_1} |y|^2 dt \text{ , donc :}$$

$$\int_{t_o}^{T} \{ \delta_{n_2} |y|^2 + |v|^2 \} dt \leq \int_{t_o}^{T} \{ \delta_{n_1} |y|^2 + |v|^2 \} dt \quad , \quad \forall v \in L^2(t_o, T; H)$$

et donc :

$$\operatorname*{Inf}_{v \in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} \{ \delta_{n_2} |y|^2 + |v|^2 \} dt \leq \operatorname*{Inf}_{v \in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} \{ -\delta_{n_1} |y|^2 + |v|^2 \} dt \ ,$$

et grâce à la rétro-commandabilité, on sait que :

$$\rho_n |y_o|^2 \leq \operatorname*{Inf}_{v \in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} \{ \delta_n |y|^2 + |v|^2 \} dt \leq 0 \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \, .$$

Donc, comme les bornes de l'encadrement sont indépendantes de T et que les limites existent lorsque $T \to \infty$, on a :

$$(P_{\delta_{n_2}} y_o, y_o) = \lim_{T \to \infty} \operatorname*{Inf}_{v \in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} \{ -\delta_{n_2} |y|^2 + |v|^2 \} dt$$

$$\leq \lim_{T \to \infty} \operatorname*{Inf}_{v \in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} \{ -\delta_{n_1} |y|^2 + |v|^2 \} dt = (P_{\delta_{n_1}} y_o, y_o)$$

donc, lorsque δ_n décroît vers 0, la suite $\{P_{\delta_n}\}$ est croissante et majorée, ce qui prouve que :

$\lim_{n \to \infty} P_{\delta_n} = P_o$ dans $\mathcal{L}(H;H)$ fort, où P_o est tel que :

$$(P_o y_o, y_o) = \lim_{T \to \infty} \operatorname*{Inf}_{v \in L^2(t_o,T;H)} \int_{t_o}^{T} |v|^2 dt = 0 \quad \forall\, y_o \in H \text{ , donc :}$$

$P_o \equiv 0$, et la continuité forte est prouvée.

Soit alors $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{d_1 \| i \|}$. D'après ce qui précède, on sait qu'il existe un $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $\| P_{\delta_\varepsilon} \| \leq \varepsilon$, où P_{δ_ε}, plus simplement noté P_ε, vérifie :

$$(\Delta P_\varepsilon - P_\varepsilon \Delta + d_1 P_\varepsilon^2) h = \delta_\varepsilon h \quad , \quad \forall\, h \in V$$

$$P_\varepsilon^* = P_\varepsilon \quad , \quad P_\varepsilon \leq 0 \quad .$$

Et comme on a : $\| d_1 P_\varepsilon h \| \leq d_1 \varepsilon \| i \| \ \| h \|$, $\forall\, h \in V$,

une condition suffisante (Kato |11|) pour que $(-\Delta + d_1 P_\varepsilon)^{-1}$ existe et soit fermé de $L^2(0,\infty;H)$ dans $L^2(0,\infty;V)$ est que :

$$\| i \| \ \| d_1 P_\varepsilon \| \ \| \Delta^{-1} \| < 1$$

ou encore : $\varepsilon d_1 \| i \| < 1$,ce qu'on a supposé plus haut , et donc $\Delta + d_1 P_\varepsilon$ engendre un semi-groupe L^2-stable , ce qui est le résultat attendu

Remarquons que si δ croît, P_δ décroît vers ∞ en norme, et on n'est plus assuré de la stabilité du système bouclé

De plus, on ne connait pas de borne sur δ_ε à partir duquel le système bouclé devient instable.

Notons enfin que comme δ est petit, la condition (10.13) est très peu restrictive sur d_1 .

On va donner maintenant un deuxième type d'application de la notion de D-passivité aux jeux différentiels ; le problème inverse

11 . LE PROBLEME INVERSE

11.1 Position du problème

Soient à résoudre les problèmes suivants :

I - Etant donné un couple (u_1, u_2) défini par :

$$(11.1)\quad \begin{cases} Q_k \ \varepsilon\ \mathcal{L}(H;H) \ , \ k = 1,2 \\ \bar{u}_1(y) = Q_1 y \quad , \quad u_2(y) = Q_2 y \end{cases}$$

on se donne un système différentiel :

$$(11\ 2)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = B_1 v_1 + B_2 v_2 \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$$

$$(P_1)\quad \begin{cases} \underline{\text{Peut-on trouver } M \ \varepsilon\ \mathcal{L}(H;H) \text{ et } D_2 \ \varepsilon \mathcal{L}(H;H) \text{ tels que}} \ : \\ \underline{(u_1, u_2) \text{ soit un point-selle en boucle fermée de}} \ : \\ \underline{J(v_1, v_2) = \lim_{T\to\infty} \{(My(T), y(T)) + \int_{t_o}^{T} \{(D_2 y, y) + (N_1 v_1, v_1) \ (N_2 v_2, v_2)\}} \\ \underline{N_1 \text{ et } N_2 \text{ étant supposés donnés}} \ ? \end{cases}$$

II Etant donnée une application $u \in \mathcal{L}(H;H)$ définie par :

$$(11.3)\quad Q \in \mathcal{L}(H;H) \ , \ u(y) = Qy$$

et un système :

$$(11.4)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = D_1 v & (D_1 = B_1 N_1^{-1} B_1^{*} \quad B_2 N_2^{-1} B_2^{*}) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$$

$$(P_2)\quad \begin{cases} \underline{\text{Peut-on trouver } M \ \varepsilon\ \mathcal{L}(H;H) \text{ et } D_2 \ \varepsilon\ \mathcal{L}(H;H) \text{ tels que } u} \\ \underline{\text{réalise le minimum de}} \ : \\ \underline{J(v) = \lim_{T\to\infty} \{(My(T), y(T)) + \int_{t_o}^{T} \{(D_2 y, y) + (D_1 v, v)\}dt\}} \ , \\ \underline{D_1 \text{ étant donné}} \ ? \end{cases}$$

11.2 Hypothèses et notations

On suppose que A, considéré comme opérateur de $D(A) = V$ dans H, est V-elliptique de constante $\alpha > 0$:

(11.5) $(Av,v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad , \quad \forall\, v \in V$.

Soit $N_i \in \mathcal{L}(H;H)$, $N_i^* = N_i$, $i = 1,2$, N_i étant H-elliptique de constante $\nu_i > 0$:

(11.6) $(N_i h,h) \geq \nu_i |h|^2 \quad , \quad \forall\, h \in H \quad , \quad i = 1,2$.

Pour le problème (P_1) on fait les hypothèses spécifiques :

. On suppose que les couples de stratégies $(u_1,\bar{u}_2)$ et $(u_1,0)$ sont jouables, soit :

(11.7) $A+B_1Q_1+B_2Q_2$ et $A+B_1Q_1$ sont L^2-stables.

. Le système :

$$(11.8) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + (A+\frac{1}{2}B_1Q_1+\frac{1}{2}B_2Q_2)y = B_1v_1+B_2v_2 \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$$

est supposé rétro-commandable.

On commence par étudier le problème (P_1) et on va voir par la suite qu'il englobe dans un certain sens le problème (P_2).

11.3 Résultat préliminaire : l'équation de Riccati condition nécessaire

PROPOSITION 11.1 : *Sous les hypothèses (11.1), (11.2) et (11.5) à (11.8), si de plus (u_1,u_2) est un point-selle en boucle fermée dans $(L^2(t_o,\infty;H))^2$ de J avec $D_2^* = D_2 \geq 0$, alors il existe*

$$(11.9) \quad \begin{cases} R \in \mathcal{L}(H;H) \ , \ R^* = R \ , \ R \geq 0 \quad \textit{solution de :} \\ (A^*R+RA+RD_1R)h = D_2h \quad , \quad \forall\, h \in V \end{cases}$$

et on a : $u_1(y) = Q_1 y = N_1^{-1} B_1^* R y$, $\bar{u}_2(y) = Q_2 y = N_2^{-1} B_2^* R y$.

<u>Démonstration</u> :

D'après le lemme 1.2, (u_1, u_2) vérifie :

$$(11.10)\quad \begin{cases} J(u_1, v_2) \leq J(u_1, u_2) \leq J(v_1, \bar{u}_2) \\ \forall\, v_1 \in L^2(t_o, \infty; H) \quad \text{tel que } (v_1, u_2) : \text{jouable} \\ \forall\, v_2 \in L^2(t_o, \infty; H) \quad \text{tel que } (u_1, v_2) : \text{jouable.} \end{cases}$$

Remarquons que dans (11.10), u_1 n'engendre pas la même commande contre u_2 et v_2 : $\bar{u}_1(v_2) = Q_1 g_1 \quad Q_1 G_2 v_2$, où :

$\{\Lambda_{Q_1}(t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ est le semi-groupe engendré par $A+B_1 Q_1$,

$g_1(t) = \Lambda_{Q_1}(t-t_o) y_o$, $(G_2 v_2)(t) = \int_{t_o}^{t} \Lambda_{Q_1}(t-s) B_2 v_2(s) ds$.

De même pour u_2 : $u_2(v_1) = Q_2 g_2 \quad Q_2 G_1 v_1$, où :

$\{\Lambda_{Q_2}(t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ est le semi-groupe engendré par $A+B_2 Q_2$,

$g_2(t) = \Lambda_{Q_2}(t-t_o) y_o$, $(G_1 v_1)(t) = \int_{t_o}^{t} \Lambda_{Q_2}(t-s) B_1 v_1(s) ds$.

De plus, u_1 (resp. u_2) est Fréchet-différentiable en v_2 (resp. v_1) et :

$$\frac{\partial u_1}{\partial v_2} = Q_1 G_2, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial v_1} = Q_2 G_1 .$$

D'autre part, comme $A+B_1 Q_1 + B_2 Q_2$ est L^2-stable, on peut trouver une boule ouverte $\mathcal{O}_1$ de $L^2(t_o, \infty; H)$, centrée en 0, telle que $\forall\, v_1 \in \mathcal{O}_1$, y solution de :

$$\frac{dy}{dt} + (A+B_1 Q_1 + B_2 Q_2) y = B_1 v_1 \quad , \quad y(t_o) = y_o$$

vérifie : $y \in L^2(t_o, \infty; V)$

De même, on peut trouver une boule ouverte $\mathcal{O}_2$ de $L^2(t_o,\infty;H)$, centrée en 0, telle que $\forall\ v_2 \in \mathcal{O}_2$, y solution de :

$$\frac{dy}{dt} + (A+B_1Q_1+B_2Q_2)y = B_2v_2 \ , \quad y(t_o) = y_o$$

vérifie : $y \in L^2(t_o,\infty;V)$

Autrement dit, (u_1,u_2+v_2) est jouable $\forall\ v_2 \in \mathcal{O}_2$

(u_1+v_1,u_2) est jouable $\forall\ v_1 \in \mathcal{O}_1$

Alors, d'après (11.10) :

$$\begin{cases} J(u_1,u_2+v_2) \quad J(u_1,u_2) \leq 0 & \forall\ v_2 \in \mathcal{O}_2 \\ \\ J(u_1+v_1,u_2) \quad J(u_1,u_2) \geq 0 & \forall\ v_1 \in \mathcal{O}_1 \end{cases}$$

et comme J est Fréchet-différentiable dans $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, on a :

$$\frac{\partial J}{\partial v_1} + \frac{\partial J}{\partial v_2}\frac{\partial u_2}{\partial v_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial J}{\partial v_2} + \frac{\partial J}{\partial v_1}\frac{\partial u_1}{\partial v_2} = 0$$

ou encore :

$$\frac{\partial J}{\partial v_1} = \frac{\partial J}{\partial v_2} Q_2G_1 \qquad , \quad \frac{\partial J}{\partial v_2} = \frac{\partial J}{\partial v_1} Q_1G_2$$

Soit :

$$(11.11) \begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial v_2}(I \quad Q_2G_1Q_1G_2) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial J}{\partial v_1} = \dfrac{\partial J}{\partial v_2} Q_2G_1 \end{cases}$$

Montrons que $(I \quad Q_2G_1Q_1G_2)$ est injectif de $L^2(t_o,\infty;H)$ dans lui-même :

Soit $x \in L^2(t_o,\infty;H)$ tel que $x = Q_2G_1Q_1G_2x$

Posons $y = G_2 x$. On a alors , $\forall\ T > t_o$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + (A+B_1Q_1)y = B_2 x \\ y(t_o) = 0 \quad , \quad y \in L^2(t_o,T;V) \ . \end{cases}$$

Posons ensuite : $z = G_1Q_1 y$. Alors $\forall\ T > t_o$:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} + (A+B_2Q_2)z = B_1Q_1 y \\ z(t_o) = 0 \quad , \quad z \in L^2(t_o,T;V) \ . \end{cases}$$

Mais comme $x = Q_2G_1Q_1G_2x = Q_2 z$, y et z vérifient le système :

$$(11.12) \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + (A+B_1Q_1)y - B_2Q_2 z = 0 \\ \dfrac{dz}{dt} + (A+B_2Q_2)z \quad B_1Q_1 y = 0 \\ y(t_o) = z(t_o) = 0 \ , \ y,z \in L^2(t_o,T;V) \quad , \end{cases}$$

ou encore , en notant $Y = \binom{y}{z}$:

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} + \begin{pmatrix} A+B_1Q_1 & -B_2Q_2 \\ B_1Q_1 & A+B_2Q_2 \end{pmatrix} Y = 0 \\ Y(t_o) = 0 \quad , \quad Y \in L^2(t_o,T;V\times V) \end{cases}$$

et comme on voit facilement que l'on peut trouver $\mu \geq 0$ tel que :

$$\left(\begin{pmatrix} A+B_1Q_1 & B_2Q_2 \\ -B_1Q_1 & A+B_2Q_2 \end{pmatrix}\phi,\phi\right) + \mu|\phi|^2_{H\times H} \geq \alpha\|\phi\|^2_{V\times V} \ , \quad \forall\ \phi \in V\times V$$

il vient que $Y = 0$ dans $L^2(t_o,T;V\times V)$, $\forall\ T > t_o$, et donc :

$y = z = 0$ dans $L^2(t_o,\infty;V)$, soit : $x = Q_2 z = 0$ dans $L^2(t_o,\infty;H)$,

ce qui prouve que $(I \quad Q_2G_1Q_1G_2)$ est injectif.

De (11.11) on déduit immédiatement que :

$$\frac{\partial J}{\partial v_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial J}{\partial v_2} = 0$$

soit :

$$(11.13) \begin{cases} \int_{t_o}^{\infty} \{ (D_2 y, G_1^{o} v_1) + (N_1 u_1, v_1) \} dt = 0 \quad \forall\, v_1 \in L^2(t_o,\infty;H) \\ \int_{t_o}^{\infty} \{ (D_2 y, G_2^{o} v_2) \quad (N_2 u_2, v_2) \} dt = 0 \quad \forall\, v_2 \in L^2(t_o,\infty;H) \end{cases}$$

avec : $(G_i^{o} v_i)(t) = \int_{t_o}^{t} \Lambda(t-s) B_i v_i(s) ds$, $i = 1,2$, et :

$$u_i(t) = Q_i \Lambda_{Q_1 Q_2}(t-t_o) y_o \text{ , } i = 1,2 \text{ , où :}$$

$\{\Lambda_{Q_1 Q_2}(t) \mid t \in R_+\}$ est engendré par $A + B_1 Q_1 + B_2 Q_2$.

Introduisons alors l'état adjoint p comme l'unique solution de :

$$(11.14) \quad \frac{dp}{dt} + A^* p = D_2 y \quad , \quad p \in L^2(t_o,\infty;V) \text{ .}$$

Alors, reportant $D_2 y = \frac{dp}{dt} + A^* p$ dans (11.13) et intégrant par parties :

$$\begin{cases} \int_{t_o}^{\infty} (B_1^* p + N_1 u_1, v_1) dt = 0 \quad \forall\, v_1 \in L^2(t_o,\infty;H) \\ \int_{t_o}^{\infty} (B_2^* p \quad N_2 u_2, v_2) dt = 0 \quad \forall\, v_2 \in L^2(t_o,\infty;H) \end{cases}$$

ou: $u_1 = N_1^{-1} B_1^* p$, $u_2 = N_2^{-1} B_2^* p$

Mais $(B_1 Q_1 + B_2 Q_2) y = (B_1 N_1^{-1} B_1^* \quad B_2 N_2^{-1} B_2^*) p = D_1 p$

donc y vérifie :

$$\frac{dy}{dt} + Ay + D_1 p = 0 \text{ , } y(t_o) = 0 \text{ , } y \in L^2(t_o,\infty;V)$$

et regroupant avec (11.14), on trouve que le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay + D_1 p = 0 \\ - \dfrac{dp}{dt} + A^* p \quad D_2 y = 0 \\ y(t_o) = y_o \ , \ y,p \in L^2(t_o,\infty;V) \end{cases}$$

a une solution $\{y,p\}$unique .

Alors, utilisant les lemmes 2.2 et 2.3, on a facilement que : $p = Ry$, $R \in \mathcal{L}(H;H)$, et par un calcul analogue à celui du lemme 2.4,on a :

$$\int_{t_o}^{\infty}\{(D_2y,y)+(N_1Q_1y,Q_1y) \ (N_2Q_2y,Q_2y)\}dt = \int_{t_o}^{\infty}\{(D_2y,y)+(D_1p,p)\}dt$$

$$= (Ry_o,y_o)$$

et donc R vérifie : $R^* = R$, et comme (u_1,u_2) est un point-selle en boucle fermée de J, compte-tenu du fait que $(u_1,0)$est jouable :

$$J(u_1,0) \leq J(u_1,u_2) = (Ry_o,y_o) \ .$$

Or $J(u_1,0) = \int_{t_o}^{\infty}\{(D_2y(u_1,0),y(u_1,0))+(N_1u_1,u_1)\}dt \geq 0$, puisque $D_2 \geq 0$ et $N_1 \geq \nu_1 I$, donc :

$$(Ry_o,y_o) \geq 0 \quad \forall \ y_o \in H \quad , \quad \text{soit : } R \geq 0 \ .$$

Enfin, R vérifie :

$(Ry_o,y_o) = \int_{t_o}^{\infty}\{(D_2y,y)+(RD_1Ry,y)\}dt$, donc, d'après Bensoussan-Delfour-Mitter [4], R vérifie :

$(A^*R+RA+RD_1R)h = D_2h$, $\forall \ h \in V$, et la proposition est démontrée.

11.4. Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème inverse (P_1) ait une solution.

Commençons d'abord par constater que le système :

$$
(11.15)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt}+(A+\frac{1}{2}B_1Q_1+\frac{1}{2}B_2Q_2)y = B_1v_1+B_2v_2 \quad , \quad y(t_o) = y_o \\ z_1 = N_1Q_1y \\ z_2 = N_2Q_2y \end{cases}
$$

peut s'écrire, en posant : $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} N_1Q_1 \\ N_2Q_2 \end{pmatrix}$, de manière habituelle :

$$
(11.16)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + (A+\frac{1}{2}B_1Q_1+\frac{1}{2}B_2Q_2)y = Bv \ , \ y(t_o) = y_o \\ z = Cy \end{cases}
$$

donc dire que (11.15) est passif, équivaut à dire que (11.16) l'est .

on peut alors exposer le:

THEOREME 11.1.: *Sous les hypothèses (11.1), (11.2) et (11.5) à (11.8), une condition nécessaire et suffisante pour que* $(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$ *défini par :* $u_1(y) = Q_1y$, $u_2(y) = -Q_2y$,
soit un point-selle en boucle fermée dans $(L^2(t_o,\infty;H))^2$ *de :*

$$
J(v_1,v_2) = \lim_{T\to\infty}\{(My(T),y(T))+\int_{t_o}^{T}\{(D_2y,y)+(N_1v_1,v_1)-(N_2v_2,v_2)\}dt\}
$$

avec : $M \geq 0$ *et* $D_2^* = D_2 \geq 0$ *, est que le système (11.15) soit passif.*

Démonstration : 1) La condition : (11.15) passif est nécessaire

Si $(u_1,\bar{u}_2)$ est un point-selle de J en boucle fermée dans $(L^2(t_o,\infty;H))^2$, on sait, par la proposition 11.1 que l'on peut trouver un opérateur $R \in \mathcal{L}(H;H)$, $R^* = R$, $R \geq 0$ tel que :

$(A^*R+RA+RD_1R)h = D_2h \quad , \quad \forall\, h \in V$, et donc :

$(A+\frac{1}{2}D_1R)^*Rh+R(A+\frac{1}{2}D_1R)h = D_2^{1/2}D_2^{1/2}h \quad , \quad \forall\, h \in V$

Toujours d'après la proposition 11.2. on a :

$$N_1Q_1 = B_1^*R \quad , \quad N_2Q_2 = -B_2^*R \quad , \text{ et donc :}$$

$$C = \begin{pmatrix} N_1Q_1 \\ N_2Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^* & 0 \\ B_2^* & 0 \end{pmatrix} R = B^*R \qquad \text{Et comme :}$$

$D_1R = B_1N_1^{-1}B_1^*R - B_2N_2^{-1}B_2^*R = B_1Q_1 + B_2Q_2$, on a que R vérifie :

$$\begin{cases} ((A+\frac{1}{2}B_1Q_1+\frac{1}{2}B_2Q_2)^*R+R(A+\frac{1}{2}B_1Q_1+\frac{1}{2}B_2Q_2))h = D_2^{1/2}D_2^{1/2}h \ , \ \forall\, h \in V \\ C = B^*R \end{cases}$$

donc $(R,D_2^{1/2},0)$ est tel que R est une réalisation du système :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}+(A+\frac{1}{2}B_1Q_1+\frac{1}{2}B_2Q_2)y = Bv \quad , \quad y(t_o) = y_o \\ z = Cy \end{cases}$$

et donc (11.15) est passif, d'après le théorème 7.1.

2) <u>La condition (11.15) passif est suffisante</u>

On peut alors trouver un triplet $(R,L,0)$ tel que :

$$\begin{cases} R \in \mathcal{L}(H;H) \ , \ R^* = R \ , \ R \geq 0 \\ ((A+\frac{1}{2}B_1Q_1+\frac{1}{2}B_2Q_2)^*R+R(A+\frac{1}{2}B_1Q_1+\frac{1}{2}B_2Q_2))h = L^*Lh \ , \ \forall\, h \in V . \\ C = \begin{pmatrix} N_1Q_1 \\ N_2Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^* & 0 \\ B_2^* & 0 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} B_1^*R \\ B_2^*R \end{pmatrix} \end{cases}$$

donc, comme $N_1Q_1 = B_1^*R$, $N_2Q_2 = B_2^*R$ et que N_1 et N_2 sont inversibles, on a :

$$B_1Q_1 + B_2Q_2 = (B_1N_1^{-1}B_1^* \quad B_2N_2^{-1}B_2^*)R = D_1R$$

et donc R vérifie :

$$((A+\tfrac{1}{2}D_1R)^*R + R(A+\tfrac{1}{2}D_1R))h = L^*Lh \quad , \quad \forall\, h \in V$$

ou $(A^*R + RA + RD_1R)h = L^*Lh \quad , \quad \forall\, h \in V$.

Posons alors $L^*L = D_2$ et $M = R$. On a donc bien $M \geq 0$ et

$D_2 = D_2^* \geq 0$.

Calculons alors $(T > t_o)$:

$$\int_{t_o}^{T}\{(D_2y,y)+(N_1v_1,v_1)\;\;(N_2v_2,v_2)\}dt = \int_{t_o}^{T}\{2((A+\tfrac{1}{2}D_1R)y,Ry)$$

$$+\;(N_1v_1,v_1)\;\;(N_2v_2,v_2)\}dt$$

$$= \int_{t_o}^{T}\{2(Ay,Ry)+(B_1Q_1y,Ry)+(B_2Q_2y,Ry)+(N_1v_1,v_1)\;\;(N_2v_2,v_2)\}dt$$

(puisque $D_1R = B_1Q_1+B_2Q_2$) .

$$= \int_{t_o}^{T}\{2(Ay,Ry)+(Q_1y,N_1Q_1y)\;\;(Q_2y,N_2Q_2y)+(N_1v_1,v_1)\;\;(N_2v_2,v_2)\}dt$$

(puisque $B_1^*R = N_1Q_1$ et $B_2^*R = \;\;N_2Q_2$)

$$= \int_{t_o}^{T}\{2(Ay,Ry)+(N_1(Q_1y+v_1),Q_1y+v_1)\;\;(N_2(Q_2y+v_2),Q_2y+v_2)$$

$$2(N_1Q_1y,v_1)+2(N_2Q_2y,v_2)\}dt$$

$$= \int_{t_o}^{T}\{2(Ry,Ay-B_1v_1\;\;B_2v_2)+(N_1(Q_1y+v_1),Q_1y+v_1)\;\;(N_2(Q_2y+v_2),Q_2y+v_2)\}dt$$

$$=\int_{t_o}^{T}\{-2(Ry,\frac{dy}{dt})+(N_1(Q_1y+v_1),Q_1y+v_1)\;\;(N_2(Q_2y+v_2),Q_2y+v_2)\}dt$$

(puisque $\frac{dy}{dt}+Ay = B_1v_1+B_2v_2$)

$$= (Ry_o,y_o)\;\;(Ry(T),y(T))+\int_{t_o}^{T}\{(N_1(Q_1y+v_1),Q_1y+v_1)-$$

$$(N_2(Q_2y+v_2),Q_2y+v_2)\}dt$$

on a donc :

(11.16) $(Ry(T),y(T))+\int_{t_o}^{T}\{(D_2y,y)+(N_1v_1,v_1)\ (N_2v_2,v_2)\}dt =$

$= (Ry_o,y_o)+\int_{t_o}^{T}\{(N_1(Q_1y+v_1),Q_1y+v_1)\ (N_2(Q_2y+v_2),Q_2y+v_2)\}dt$,

et ceci $\forall\ T > t_o$ et $\forall\ (v_1,v_2)\ \varepsilon\ (L^2(t_o,T;H))^2$

Alors, compte tenu de l'hypothèse de stabilité sur le semi-groupe engendré par $A+B_1Q_1+B_2Q_2 = A+D_1R$, on a que :

$u_1(y(t)) = Q_1y(t)$, $u_2(y(t)) = Q_2y(t)$ vérifient :

$(u_1(y(.)),u_2(y(.)))\ \varepsilon\ (L^2(t_o,\infty;H))^2$.

Et comme alors : $\lim\limits_{T\to\infty}|y(T)| = 0$, on a, pour $v_1 = u_1$ et $v_2 = u_2$ dans (11.16) :

$\lim\limits_{T\to\infty}\{(Ry(T),y(T))+\int_{t_o}^{T}\{(D_2y,y)+(N_1Q_1y,Q_1y)\ (N_2Q_2y,Q_2y)\}dt\} = (Ry_o,y_o)$

Reste à vérifier que (u_1,u_2) est bien un point-selle de :

$J(v_1,v_2) = \lim\limits_{T\to\infty}\{(Ry(T),y(T))+\int_{t_o}^{T}\{(D_2y,y)+(N_1v_1,v_1)-(N_2v_2,v_2)\}dt\}$.

On vérifie alors aisément que si $v_1 = u_1$ et si $v_2\ \varepsilon\ L^2(t_o,\infty;H)$ est tel que (u_1,v_2) soit jouable,

$\lim\limits_{T\to\infty}\{(Ry(T),y(T))+\int_{t_o}^{T}\{(D_2y,y)+(N_1Q_1y,Q_1y)\ (N_2v_2,v_2)\}dt\} =$

$= (Ry_o,y_o)\ \lim\limits_{T\to\infty}\int_{t_o}^{T}(N_2(Q_2y+v_2),Q_2y+v_2)dt \le (Ry_o,y_o)$, puisque $N_2 \ge \nu_2 I$.

D'autre part, si $v_2 = u_2$ et si $v_1\ \varepsilon\ L^2(t_o,\infty;H)$ est tel que (v_1,u_2) soit jouable ,

$$\lim_{T\to\infty}\{(Ry(T),y(T))+\int_{t_o}^{T}\{(D_2y,y)+(N_1v_1,v_1)\ (N_2Q_2y,Q_2y)\}dt\}=$$

$$=(Ry_o,y_o)+\lim_{T\to\infty}\int_{t_o}^{T}(N_1(Q_1y+v_1),Q_1y+v_1)dt \geq (Ry_o,y_o) \text{ puisque}$$

$N_1 \geq \nu_1 I$, ce qui prouve, compte tenu du lemme 1.2, que $(\bar{u}_1,u_2)$ est un point-selle en boucle fermée dans $(L^2(t_o,\infty;H))^2$ de J , et le résultat est démontré

Remarque 11.1 : Le théorème 11.1 donne implicitement une solution au problème (P_1) puisque (u_1,u_2) sera un point-selle en boucle fermée dans $(L^2(t_o,\infty;H))^2$ de J si $D_2 = L^*L$ et si $M = R$, avec :

$$(A^*R+RA+RD_1R)h = D_2h = L^*Lh \quad , \quad \forall\ h \in V .$$

De plus, comme par le théorème 8.1, il existe un R_{min} donné par : $(R_{min}y_o,y_o) = \lim_{T\to\infty}\ \operatorname{Inf}_{(v_1,v_2)\in(L^2(t_o,\infty;H))^2} \int_{t_o}^{T} 2\{(z_1,v_1)+(z_2,v_2)\}dt$,

on peut trouver une fonctionnelle $J_{min}(v_1,v_2)$ qui donne la plus petite valeur du point-selle. On aura alors : $D_2 = L^*_{min}L_{min}$ et $M = R_{min}$.

Remarque 11.2 : En fait, à la lumière du théorème 11.1, il suffit de se donner un seul opérateur R et de chercher $D_2^* = D_2 \geq 0$ pour lequel la fonctionnelle :

$$J(v_1,v_2) = \int_{t_o}^{\infty}\{(D_2y,y)+(N_1v_1,v_1)\ (N_2v_2,v_2)\}dt$$

atteint son point-selle dans $(L^2(t_o,\infty;H))^2$ pour :

$$u_1(y) = N_1^{-1}B_1^*Ry \quad , \quad \bar{u}_2(y) = N_2^{-1}B_2^*Ry \ .$$

Ce résultat est résumé dans le :

COROLLAIRE 11.1 : *Soit* $P \in \mathcal{L}(H;H)$, $P^* = P$, $P \geq 0$, *tel que les semi-groupes engendrés par* $A+D_1P$ *et par* $A+B_1N_1^{-1}B_1^*P$ *soient* L^2*-stables. On suppose de plus que le système :*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + (A+\frac{1}{2}D_1P)y = B_1v_1 + B_2v_2 \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$$

est rétro-commandable.

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que (u_1,u_2) *défini par :* $u_1(y) = N_1^{-1}B_1^*Py$, $u_2(y) = N_2^{-1}B_2^*Py$ *soit un point-selle en boucle fermée dans* $(L^2(t_o,\infty;H))^2$ *de :*

$J(v_1,v_2) = \int_{t_o}^{\infty}\{(D_2y,y)+(N_1v_1,v_1)\ (N_2v_2,v_2)\}dt$, *avec :*

$D_2^* = D_2 \geq 0$, *est que le système :*

$$(11.17)\begin{cases} \frac{dy}{dt}+(A+\frac{1}{2}D_1P)y = B_1v_1+B_2v_2, \quad y(t_o) = y_o \\ z_1 = B_1^*Py \\ z_2 = B_2^*Py \end{cases}$$

soit passif.

Donnons maintenant des conditions plus explicites pour que (11.17) soit passif.

11.5. Conditions pour que (11.17) soit passif

Proposition 11.3 : *Sous les hypothèses du corollaire 11.1, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) (11.17) est passif

(ii) $A^*P+PA+PD_1P \geq 0$

(iii) $P(sI+A+\frac{1}{2}D_1P)^{-1} \geq 0$, $\forall$ Res ≥ 0 .

Démonstration : il suffit d'appliquer le théorème 7.2.

<u>Remarque 11.3</u> : La condition $A^*P+PA+PD_1P \geq 0$ peut s'écrire :

(11.18) $\quad P(A + \frac{1}{2}D_1P) \geq 0$.

Donc, en particulier, si P commute avec $A + \frac{1}{2}D_1P$ et si $A + \frac{1}{2}D_1P \geq 0$ et $P \geq 0$, on aura (Riesz-Nagy [21]) (11.18).

Prenons, pour simplifier, $B_1 = b_1I$, $B_2 = b_2I$, $N_1 = n_1I$, $N_2 = n_2I$, $n_1 > 0$ et $n_2 > 0$; on a alors :

$$d_1 = \frac{b_1^2}{n_1} \quad \frac{b_2^2}{n_2} \quad , \quad D_1 = d_1I \; .$$

Dans ce cas, il suffit que P commute avec A.

La condition $A+\frac{1}{2}D_1P \geq 0$ s'écrit :

(11.19) $\quad (Ay,y)+\frac{1}{2}d_1(Py,y) \geq 0 \;,\; \forall\, y \in V$.

. Si $d_1 \geq 0$, (11.19) est trivialement vérifié;

. Si maintenant $d_1 < 0$, il suffit que :

(11 20) $$\|P\|_{\mathcal{L}(H;H)} \leq \frac{2\alpha n_1 n_2}{\|i\|^2_{\mathcal{L}(V;H)}(b_2^2n_1 \quad b_1^2n_2)}$$

où i est l'injection de V dans H, pour que (11.19) ait lieu .

En effet :

$$(Py,y) \leq \|P\|\,|y|^2 \leq \|P\|\,\|i\|^2\|y\|^2$$

$$\leq \frac{2\alpha n_1 n_2}{\|i\|^2(b_2^2n_1-b_1^2n_2)}\,\|i\|^2\|y\|^2$$

et donc : $\quad \frac{1}{2}\,\frac{b_2^2n_1 \quad b_1^2n_2}{n_1n_2}\,(Py,y) \leq \alpha\|y\|^2$

ou : $\alpha\|y\|^2 + \frac{1}{2}d_1(Py,y) \geq 0$, $\forall\, y \in V$, d'où (11.19)

11.6. Exemple

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, de frontière Γ régulière.

Soit $\check{\Omega} = \{x \mid x = -y\ ,\ y \in \Omega\}$ et supposons que $\mathring{\Omega} \cap \mathring{\check{\Omega}} \neq \emptyset$ ($\mathring{\Omega}$ et $\mathring{\check{\Omega}}$ désignant l'intérieur de Ω et de $\check{\Omega}$ respectivement).

On prend $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ et le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}\ \Delta y = b_1 v_1 + b_2 v_2 & \text{dans } Q = \left]t_0,\infty\right[\times\Omega \\ y_{|\Sigma} = 0 & \text{où } \Sigma = \left]t_0,\infty\right[\times\Gamma \\ y(t_0) = y_0 \in V & \end{cases}$$

l'un au moins de b_1 et b_2 devant être différent de 0 .

On cherche $D_2^* = D_2 \geq 0$ de sorte que le couple (u_1, u_2) défini ci-après, soit un point-selle en boucle fermée dans $(L^2(t_0,\infty;H))^2$ de :

$$J(v_1,v_2) = \int_{t_0}^{\infty}\{(D_2y,y)+n_1|v_1|^2-n_2|v_2|^2\}dt\ .$$

Définissons (u_1,u_2) comme suit :

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega)\ ,\ \mathrm{supp}\phi \text{ compact dans } \Omega\}$.

On pose $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$ et on suppose que $\check{\phi} \not\equiv 0$, ce qui a un sens puisque $\mathring{\Omega} \cap \mathring{\check{\Omega}} \neq \emptyset$.

Soient y et z dans $L^2(\Omega)$, prolongés par 0 en dehors de Ω , et prolongeons ϕ par 0 en dehors de son support. Posons :

$$(Py,y) = (\check{\phi} * (1_{\Omega^\circ}(\phi * y)),z) = (\phi * y, \phi * z)\ ,\ \forall\, y,z \in L^2(\Omega)\ ,$$

où $*$ est la convolution au sens des distributions et 1_Ω la fonction indicatrice de Ω.

On a alors : $P \in \mathcal{L}(H;H)$, $P^* = P$, $P \geq 0$ et :

$\|P\|_{\mathcal{L}(H;H)} \leq |\Omega|\,|\phi|^2$ où $|\Omega|$ = mesure de Ω .

On pose enfin : $u_1(y) = \dfrac{b_1}{n_1}Py$, $u_2(y) = \dfrac{b_2}{n_2}Py$.

Vérifions d'abord que P commute avec Δ dans :

$$H^1(\Delta) : \{\phi \in H_0^1(\Omega) \,|\, \Delta\phi \in L^2(\Omega)\} .$$

Soient y et $z \in H^1(\Delta)$. On a :

$$(P\Delta y, z) = (\Delta\phi * y, \phi * z) = (\phi * y, \Delta\phi * z) = (\Delta\phi * (1_\Omega \circ (\phi * y))^{\vee}, z)$$

$$= (\Delta\{\phi * (1_\Omega \circ (\phi * y))^{\vee}\}, z) = (\Delta P y, z) .$$

Pour appliquer le corollaire 11.1, il faut vérifier :

1) que le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} \quad (\Delta - \dfrac{1}{2}(\dfrac{b_1^2}{n_1} - \dfrac{b_2^2}{n_2})P)y = b_1 v_1 + b_2 v_2 \\ y(t_o) = y_o \in V \end{cases}$$

est rétro-commandable pour t_o suffisamment petit, si l'on suppose que l'un au moins de b_1 ou b_2 est différent de 0.

2) que P est tel que les semi-groupes engendrés par

$\Delta + d_1 P$ et par $\Delta + \dfrac{b_1^2}{n_1}P$ soient L^2-stables.

3) que (11.19) ou (11.20) est vérifié lorsque $d_1 < 0$.

<u>Vérification de 1)</u> : il suffit, comme à l'exemple 10.4, de prendre $t_o > 0$ suffisamment petit de sorte que $\Lambda_P^{-1}(t_o)$ existe

($\Lambda_P(t)$ étant le semi-groupe fortement continu engendré par

$\Delta + \frac{1}{2}d_1 P$)

Alors, en prenant $\tau \in [0,t_o[$ et :

$$\begin{cases} v_1^*(s) = \dfrac{1}{t_o-\tau} \cdot \dfrac{b_1}{b_1^2+b_2^2} \Lambda_P(s)\Lambda_P^{-1}(t_o)y_o \\ \\ v_2^*(s) = \dfrac{1}{t_o-\tau} \cdot \dfrac{b_2}{b_1^2+b_2^2} \Lambda_P(s)\Lambda_P^{-1}(t_o)y_o , \end{cases}$$

On a : $y^*(t_o) = \int_\tau^{t_o} \Lambda_P(t_o\ s)\begin{pmatrix} b_1 I & b_2 I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^*(s) \\ v_2^*(s) \end{pmatrix} ds = y_o$,

d'où la rétro-commandabilité.

<u>Vérification de 2)</u>: Il est clair, comme $P \geq 0$, que si

$\Delta+(\frac{b_1^2}{n_1}\quad\frac{b_2^2}{n_2})P$ est V-elliptique, il en sera de même de $\Delta+\frac{b_1^2}{n_1}P$,

et que si $d_1 \geq 0$, compte tenu de l'ellipticité de Δ , le semi groupe engendré par $\Delta+d_1P$ sera L^2-stable On doit donc vérifier 2) uniquement pour $d_1 < 0$.

Montrons que dans ce cas, il suffit que :

$$(11\ \ 21)\qquad |\phi|^2 < \frac{n_1 n_2}{|\Omega|\,||\,i\,||^2_{\mathcal{L}(V;H)}(b_2^2 n_1\quad b_1^2 n_2)}$$ pour avoir

l'ellipticité de $\Delta+d_1P$:

D'après (11.21), on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que :

$|\phi|^2 \leq \frac{(1\ \ \varepsilon)n_1 n_2}{|\Omega|\,||\,i\,||^2(b_2^2 n_1\quad b_1^2 n_2)}$ et comme $||\,P\,||_{\mathcal{L}(H;H)} \leq |\Omega|\,|\phi|^2$,

on a : $\forall\ y \in V$, $(Py,y) \leq ||\,P\,||_{\mathcal{L}(H;H)}\,||\,i\,||^2_{\mathcal{L}(V;H)}\,||\,y\,||^2$

$$\leq |\Omega|\,|\phi|^2\,||\,i\,||^2\,||\,y\,||^2$$

$$\leq (1\ \ \varepsilon)\frac{n_1 n_2}{b_2^2 n_1 - b_1^2 n_2}$$

donc : $\| y \|^2 \left(\frac{b_2^2}{n_2} - \frac{b_1^2}{n_1}\right)(Py,y) \geq \varepsilon \| y \|^2$

soit : $((-\Delta + d_1 P)y,y) \geq \varepsilon \| y \|^2 \ , \ \forall \ y \in V$.

Vérification de 3) : Il suffit d'appliquer (11 20) si $d_1 < 0$ et de remarquer que 3) est toujours vérifié lorsque $d_1 \geq 0$.
Dans le cas présent, (11.20) s'écrit :

$$(11.22) \qquad |\phi|^2 \leq \frac{2 n_1 n_2}{|\Omega| \, \| i \|^2_{\mathcal{L}(V;H)} (b_2^2 n_1 - b_1^2 n_2)}$$

Notons que si (11.21) a lieu, (11.22) est automatiquement vérifié .

En conclusion , si (11.21) a lieu, et si t_0 est suffisamment petit, les points 1),2) et 3) sont vérifiés quel que soit le signe de d_1 et on peut trouver $D_2^* = D_2 \geq 0$ tel que :

$$(11.23) \qquad D_2 h = (-2\Delta P + d_1 P^2)h \ , \ \forall \ h \in V .$$

Alors (u_1, u_2) défini par: $u_1(y) = \frac{b_1}{n_1} Py$, $u_2(y) = \frac{b_2}{n_2} Py$ est un point-selle en boucle fermée dans $(L^2(t_0,\infty;H))^2$ de la fonctionnelle : $J(v_1,v_2) = \int_{t_0}^{\infty} \{ (-2\Delta\phi * y, \phi * y) + d_1 | \phi * (1_{\Omega} \circ (\check{\phi} * y)) |^2 + n_1 |v_1|^2 - n_2 |v_2|^2 \} d$

Il est intéressant de noter que l'on a exhibé un noyau solution de l'équation intégro-différentielle de Riccati associée à (11 23), de la forme :

$P\psi = \int_{\Omega} P(x-\xi)\psi(\xi)d\xi \ , \ \forall \ \psi \in V$ et :

$P(x-\xi) = \int_{\Omega} \phi(x-\zeta)(1_{\Omega} \circ \check{\phi})(\zeta-\xi)d\zeta$, où $P(x-\xi)$ est solution de :

$$-\Delta_x P(x-\xi) - P(x-\xi)\Delta_{\xi} + d_1 \int_{\Omega} P(x-\zeta)P(\zeta-\xi)d\zeta = D_2(x-\xi)$$

$D_2(x-\xi)$ étant le noyau de D_2 : $D_2\psi = \int_{\Omega} D_2(x-\xi)\psi(\xi)d\xi, \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

11.7. Réduction du problème (P_1)

On va montrer que le système passif (11.17) a les mêmes propriétés qu'un système beaucoup plus simple à une seule entrée et une seule sortie :

THEOREME 11.2 : *Si* $t_0 > 0$ *est suffisamment petit et si* $Q \in \mathcal{L}(H;H)$, $Q^* = Q$, $Q \geq 0$, *les trois assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) Le système :

$$(11.24) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt}+(A+\frac{1}{2}D_1 Q)y = v \quad , \quad y(t_0) = y_0 \in V \\ z = Qy \end{cases}$$

est passif .

(ii) $A^*Q+QA+QD_1Q \geq 0$

(iii) $Q(sI+A+\frac{1}{2}D_1 Q)^{-1} \geq 0$, $\forall$ Res ≥ 0 (Ims$\neq$0 si Res = 0)

Démonstration : immédiate à partir du théorème 7.2 si l'on vérifie que (11.24) est rétro-commandable. Pour cela, on procède exactement comme aux exemples 10.4 et 11.7.

A l'aide de cette réduction, on peut aborder le problème $(P_2$

11.8 Le problème (P_2)

THEOREME 11.3 : *Sous les hypothèses (11.1),(11.3) à (11.6) et si* $D_1 \geq 0$, *une condition nécessaire et suffisante pour que* $u(y) = - Qy$ *réalise le minimum dans* $L^2(t_0,\infty;H)$ *de :*

$J(v) = \int_{t_0}^{\infty}\{(D_2y,y) + (D_1v,v)\}dt$ *sous la contrainte (11.4) , avec* $D_2^* = D_2 \geq 0$, *est que (11.24) soit passif.*

Démonstration : La condition est nécessaire

Soit $u(y) =$ Qy réalisant le minimum de $J(v)$ dans $L^2(t_0,\infty;H)$.

Alors l'état y vérifie :

$$(11.25) \quad \frac{dy}{dt} + Ay + D_1Qy = 0 \quad , \quad y(t_o) = y_o \quad , \quad y \in L^2(t_o,\infty;V) \ .$$

D'autre part, si l'on pose $\bar{u}(t) = -Qy(t)$, $\bar{u}$ réalise le minimum en <u>boucle ouverte</u> dans $L^2(t_o,\infty;H)$ et donc $\bar{u}$ vérifie l'équation variationnelle :

$$(J'(\bar{u}),v) = \int_{t_o}^{\infty}\{(D_2y,Gv)+(D_1\bar{u},v)\}dt = 0 \quad , \quad \forall\, v \in L^2(t_o,\infty;H) \text{ où}$$

$(Gv)(t) = \int_{t_o}^{t}\Lambda(t-s)D_1v(s)ds$, $\Lambda(t)$ étant le semi-groupe engendré par A.

Introduisons l'état adjoint p comme l'unique solution de :

$$-\frac{dp}{dt} + A^*p = D_2y \quad , \quad p \in L^2(t_o,\infty;V) \ .$$

On a alors :

$$(J'(u),v) = \int_{t_o}^{\infty}(D_1p+D_1\bar{u},v)dt = 0 \quad \forall\, v \in L^2(t_o,\infty;H)$$

et donc : $D_1p(t) = \quad D_1\bar{u}(t) = D_1Qy(t)$ p.p. $t \in [t_o,\infty[$.

En reportant dans (11.25), on obtient que le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay + D_1p = 0 \\ -\dfrac{dp}{dt} + A^*p - D_2y = 0 \\ y(t_o) = y_o \quad , \quad y,p \in L^2(t_o,\infty;V) \end{cases}$$

a une solution unique.

En découplant selon les méthodes de Lions [13] , on obtient alors que Q vérifie :

$$\begin{cases} Q \in \mathcal{L}(H;H) \ , \ Q^* = Q \ , \ Q \geq 0 \\ (A^*Q + QA + QD_1Q)h = D_2h \quad , \quad \forall\, h \in V \ . \end{cases}$$

Et comme $D_2^* = D_2 \geq 0$, on a : $A^*Q + QA + QD_1Q \geq 0$

et donc (11.24) est passif.

<u>La condition est suffisante</u> :

Si (11.24) est passif, on a par le théorème 11.2 :

$$\begin{cases} A^*Q + QA + QD_1Q \geq 0 \\ Q^* = Q \quad , \quad Q \geq 0 \end{cases}$$

Posons alors $D_2 = (ij^{-1}A^*Qj^{-1}i^* + ij^{-1}QAj^{-1}i^* + QD_1Q)$, avec :

i : injection de V dans H et j : isomorphisme canonique de V sur V'.

On a alors $D_2 \in \mathcal{L}(H;H)$, $D_2^* = D_2 \geq 0$ et :

$(A^*Q + QA + QD_1Q)h = D_2h \quad , \quad \forall\, h \in V$, ou :

$((2Q(A+D_1Q) \quad QD_1Q \quad D_2)h,h) = 0 \quad , \quad \forall\, h \in V$ et donc, comme le couple $(D_2^{1/2},A)$ est détectable puisque A est coercif, (il suffit de prendre $K = D_2^{1/2}$: $A+D_2^{1/2}D_2^{1/2}$ engendre alors un semi-groupe L^2-stable), d'après Zabczyk|25| , on sait que le semi-groupe engendré par $A+D_1Q$ est L^2-stable.

Cherchons alors le minimum de $J(v)=\int_{t_0}^{\infty}\{(D_2y,y)+(D_1v,v)\}dt$ en faisant le changement de variable : $w = v+Qy$.

Comme $y = \Lambda_Q(t-t_0)y_0$ où $\Lambda_Q(t)$ est engendré par $A+D_1Q$, on a : $y \in L^2(t_0,\infty;H)$ et $Qy \in L^2(t_0,\infty;H)$, donc : $w \in L^2(t_0,\infty;H)$

Le système devient alors : $\frac{dy}{dt} + (A+D_1Q)y = D_1w \quad , \quad y(t_0) = y_0$, et :

$$\begin{aligned} J(v) &= \int_{t_0}^{\infty}\{(D_2y,y)+(D_1w-D_1Qy,w \quad Qy)\}dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty}\{((A^*Q+QA+QD_1Q)y,y)+(QD_1Qy,y)-2(Qy,D_1w)+(D_1w,w)\}dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty}\{2((A+D_1Q)y-D_1w,Qy)+(D_1w,w)\}dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty}\{-2(\frac{dy}{dt},Qy)+(D_1w,w)\}dt = (Qy_0,y_0)+\int_{t_0}^{\infty}(D_1w,w)dt \end{aligned}$$

Comme $D_1 \geq 0$, il est clair que le minimum est atteint pour $w = 0$, et donc pour $u(.) = Qy(.) \in L^2(t_o,\infty;H)$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 11.4 : Le résultat du théorème 11.3 ne nécessite aucune hypothèse de stabilité, c'est pourquoi le problème (P_2) n'englobe pas entièrement le problème (P_1).

Remarque 11.5 : Une conséquence directe du théorème 11.3 est que si Q vérifie $(A^*Q + QA + QD_1Q)h = D_2h$, $\forall h \in V$, avec : $D_2^* = D_2 \geq 0$, alors $u = Qy$ (resp. $u_1 = N_1^{-1}B_1^*Qy$, $u_2 = N_2^{-1}B_2^*Qy$) réalise le minimum dans $L^2(t_o,\infty;H)$ (resp. Le point-selle en boucle fermée dans $(L^2(t_o,\infty;H))^2$) et on retrouve donc les résultats du chapitre 5.

Ce qu'il y a de plus ici, outre le fait que l'on résout le problème inverse, est que l'on établit le caractère nécessaire et suffisant de l'existence d'une solution de l'équation de Riccati (pour A : V-elliptique); ce fait était connu en dimension finie, mais non dans notre cadre

Remarque 11.6 : Le problème (P_2) est en fait équivalent à la famille de problèmes suivants :

Trouver M et D_2 tels que $u = Qy$ soit le minimum de :

$$J_{m,n}(v) = \lim_{T\to\infty}\{(My(T),y(T)) + \int_{t_o}^{T}\{(D_2y,y)+(D_3^{2m}D_1^n v,v)\}dt\}$$

sous la contrainte : $\frac{dy}{dt}+Ay = D_3^m D_1^{(n+1)/2}v$, $y(t_o) = y_o$,

où $D_3^* = D_3 \in \mathcal{L}(H;H)$, inversible et commutant avec D_1, et où m et n sont des entiers naturels (avec la convention $D^\circ = I$)

La même démonstration s'applique à des modifications évidentes près. Pour $n=0$ et $D_3=I$, m étant quelconque, on retrouve :

$$J(v) = \lim_{T\to\infty}\{(My(T),y(T)) + \int_{t_o}^{T}\{(D_2y,y)+|v|^2\}dt\} ,$$

$$\frac{dy}{dt} + Ay = D_1^{1/2}v , \; y(t_o) = y_o .$$

11.9. <u>Un contre-exemple</u>

On va montrer qu'on ne peut affaiblir l'hypothèse d'ellipticité de A jusqu'à $A \geq 0$.

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = b(v_1+v_2) \quad , \quad b \neq 0 \\ \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$$

et : $J(v_1,v_2) = n\int_{t_o}^{\infty}\{|v_1|^2 \quad |v_2|^2\}dt$, $n > 0$.

On se trouve donc dans le cas où $D_2 = 0$ et $D_1 = 0$.

Choisissons A anti-adjoint : $(Ay,z) = (y,A^*z) = -(y,Az)$, $\forall\, y \in V$, $\forall\, z \in V$.

On a donc : $(Ay,y) = 0 \quad \forall\, y \in V$.

Supposons que l'on puisse encore appliquer la théorie précédente. Alors, comme $D_1 \geq 0$, il suffit de se ramener au problème de minimum : $\frac{dy}{dt} + Ay = 0$, $y(t_o) = y_o$, et $J(v) = 0$.

Pour que $u = -Py$ soit le minimum de J dans $L^2(t_o,\infty;H)$, il faut et il suffit que P vérifie : $(A^*P+PA)h = 0 \quad \forall\, h \in V$.

Choisissons un P vérifiant :

$P^* = P$, $P \geq 0$, $P \in \mathcal{L}(H;H)$, P commute avec A.

On peut prendre par exemple $P = \pi I$ où $\pi \in R_+$.

On a alors : $(A^*P+PA)h = (A^*P-PA^*)h=(A^*P-A^*P)h = 0$, $\forall h \in V$.

On peut donc prendre π aussi grand que l'on veut.

Or, si $A = \frac{\partial}{\partial x}$, $H = L^2(\mathbb{R})$, $V= H^1(\mathbb{R})$, on sait que A est générateur d'un groupe et donc, daprès le théorème 9.1, on devrait avoir l'existence d'un P_{max}, avec : $\| P_{max} \| \leq \rho$, ce qui contredit le fait que π n'est pas borné supérieurement, et donc la théorie ne s'applique pas.

C'est l'analogue du fait bien connu en dimension finie en Automatique, que lorsque la matrice A a ses valeurs propres sur l'axe imaginaire, on ne peut trouver de solution stable au problème de la commande optimale.

12. TABLEAU RECAPITULATIF

On se place d'abord dans le cadre du chapitre 4 :

HYPOTHESES	Existence de P Eq de Riccati	Existence de pt.selle B.O.(†)	Existence de pt.selle B.F.(†)
A: λ-coercif, $D_2 \geq 0$ (H2): $D_1 \geq 0$ (C,A) détectable $(A, D_1^{1/2})$ stabilisable	+		+ (††)
A: λ-coercif, $D_2 \leq 0$ (H2): $D_1 \geq 0$ $I+D_1^{1/2}(\bar{s}I+A^*)^{-1}\bar{D}_2(sI+A)^{-1}D_1^{1/2} \geq 0$ + rétro-commandabilité	+ $(P \leq 0)$		+ dans (†††) si $A+D_1P$: stable
A: V-elliptique (H1): $\nu_1 > 0, \nu_2 > \mathcal{G}_2^2$ ou (H2): $D_1 \geq 0$	+	+ si (H1)	+ (††)

Enfin, dans le cadre du §5.3 :

A: V-elliptique (H2): $D_1 \geq 0$ $\alpha^2 > \lVert D_1 \rVert \, \lVert D_2 \rVert$	+		+ (††)
A: V-elliptique (H1)': $\nu_1 > \mathcal{G}_1^2, \nu_2 > \mathcal{G}_2^2$	+	+	+ (††)

†: B.O.: boucle ouverte

B.F.: boucle fermée

††: dans $L^2(0,\infty;F_1) \times L^2(0,\infty;E_2)$.

†††: $L^2_{loc}(0,\infty;E_1) \times L^2_{loc}(0,\infty;E_2)$

BIBLIOGRAPHIE

[1] B.D.O.ANDERSON-R.W. BROCKETT : "A Multiport State-Space Darlington Synthesis" IEEE. Circuit Theory. CT14n°3.p.336-337, Sept.1967.

[2] A. BENSOUSSAN : "Saddle-Points of Convex-Concave Functionals" in Differential Games and Related Topics Kuhn-Szegö Ed North-Holland Pub. Co. 1971

[3] A. BENSOUSSAN : "Points de Nash dans le Cas de Fonctionnelles Quadratiques et Jeux Différentiels Linéaires à N-personnes". SIAM Control. Vol 13 n° 3.p 460-499 August 1974.

[4] A. BENSOUSSAN-M.C. DELFOUR-S.K MITTER : "Optimal Control of Linear Integral Equations with a Quadratic Cost Function : the Infinite Time Interval Problem". A paraître

[5] L.D BERKOVITZ : "Lectures on Differential Games" in Differential Games and Related Topics. Kuhn-Szegö Ed. North-Holland Pub. Co. 1971.

[6] R.W. BROCKETT : "Finite Dimensional Linear Systems". New York J. Wiley. 1970.

[7] M. CLERGET - F GERMAIN : "Opérateurs de type rationnel positif. Applications aux séries temporelles et à l'hyperstabilité " A paraître

[8] P. FAURRE : Thèse. Paris VI. 1972.

[9] R.E KALMAN : "Linear Stochastic Filtering. Reappraisal and Outlook". Symposium on System Theory. Polytechnic Institute of Brooklyn p.197-205. April 1965

[10] R.E. KALMAN : "Lyapunov Functions for the Problem of Lur'e in Automatic Control". Proceedings of the N.A.S Vol.49.p201-205. February 1963.

[11] T.KATO : "Perturbation Theory for Linear Operators" Springer Verlag 1966

[12] E.LEMAIRE : Thèse Paris VI. 1970.

[13] J.L.LIONS : "Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles". Dunod . G.V. 1968

[14] J.L. LIONS :"Problèmes aux Limites dans les Equations aux Dérivées Partielles". Presses de l'Université de Montréal 1962.

[15] J.L.LIONS-E.MAGENES :"Problèmes aux Limites non Homogènes" Tome I. Dunod 1968

[16] B.P MOLINARI :"Nonnegativity of a Quadratic Functional" SIAM Control.Vol.13.n°4.p792-806.July 1975

[17] P.J MOYLAN :"Implications of Passivity in a Class of Non Linear Systems". IEEE Automatic Control. Vol AC .19.n°4.p373-381 August 1974.

[18] P.J. MOYLAN-B.D.O. ANDERSON :"Nonlinear Regulator Theory and an Inverse Optimal Control Problem".IEEE Automatic Control Vol AC.18.p460-464.Oct.1973.

[19] J. NEČAS :"Méthodes Directes dans la Théorie des Equations Elliptiques" Masson. Paris.1967.

[20] V.M. POPOV :"Hyperstability and Optimality of Automatic Systems with Several Control Functions". Rev. Roum. Sci. Tech., Sér. Electrotech. Energ. Vol.9.n°4.p629-690. 1964.

[21] F. RIESZ-B. NAGY :"Leçons d'Analyse Fonctionnelle". Gauthier Villars. Paris. 1965.

[22] J. VON NEUMANN-O. MORGENSTERN :"Theory of Games and Economic Behaviour". 2d.Ed. Princeton University Press 1947

[23] J.C. WILLEMS :"Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation". IEEE Automatic Control Vol AC 16 n°6.p621-634. Dec.1971.

[24] V.A. YAKUBOVICH :"Absolute Stability of Nonlinear Control in Critical Cases". I. Avt.i Telem. 24.n°3.p293-303.March 1963.
II. Avt.i Telem. 24.n°6.p717-731.June 1963.

[25] J. ZABCZYK :"Remarks on the Algebraic Riccati Equation in Hilbert Space". A paraître.